



سبقت (۰۵۱-۳۸۱۱۷)

نام آزمون: تابع پایه کنکور و قلمچی تا ۱۴۰۰

تلگرام استاد شاکریان : @riazi_jazb

خرید محصولات : ۰۹۰۱ ۴۲۵ ۳۰۵۰

ریشه، توان گویا و گنگ و قوانین رادیکال‌ها

۱) فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ مقدار

سراسری - ۱۴۰۰

$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$ کدام است؟

- ۱) $4(2 + \sqrt{3})$ ۲) $4(2 - \sqrt{3})$ ۳) $16(2 + \sqrt{3})$ ۴) $16(2 - \sqrt{3})$

۲) فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند

سراسری - ۱۴۰۰

مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

خارج از کشور - ۱۳۹۹

۳) حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1}$ ، کدام است؟

- ۱) $1+2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) ۱

سراسری - ۱۳۹۹

۴) حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}$ ، کدام است؟

- ۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $-1+\sqrt{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$



معادله درجه دوم

۵) حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه‌ای از تابع $y = x^2 - 4x + m$ دارای فاصله‌ی ۵ از محور x ها

نباشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

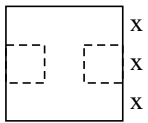
④ $-5 < m < -2$

③ $-2 < m < 3$

② $m < -2$

① $m > 9$

۶) در مربع شکل زیر، دو مربع کوچک‌تر، مطابق شکل به فاصله‌ی برابر از بالا و پایین مربع بزرگ‌تر، طوری جدا می‌کنیم تا محیط و مساحت شکل باقی‌مانده با هم برابر باشند. طول ضلع مربع جداشده کدام است؟



منتا - ۱۳۹۸

④ $\frac{17}{7}$

③ ۲

② $\frac{15}{7}$

① $\frac{16}{7}$

۷) به‌ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، معادله‌ی درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ ، دارای

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟ (با تغییر)

سراسری - ۱۳۹۸

② $-2 < m < 3,5 - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

① $-2 < m < 2,5 - \{0\}$

④ $-1 < m < 2,5 - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

③ $-1 < m < 3,5 - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

۸) به‌ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر برای m ، معادله‌ی $(m+4)x^2 + mx + \frac{1}{2} = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف

دارد که علامت آن منفی است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

④ $\emptyset$

③ $\{-2, 4\}$

② $\{-2\}$

① $\{4\}$

۹) با ۶۰ متر نرده می‌خواهیم دور مزرعه‌ای مستطیل‌شکل، حصار بکشیم. اگر مساحت مزرعه ۲۱۶ متر

مربع باشد، طول مزرعه چقدر از عرض آن بیش‌تر است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

④ ۳۰

③ ۶

② ۱۵

① ۳



۱۰) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + 8x - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۴ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۶۴ (۱)

۱۱) به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

سراسری - ۱۳۹۷

۳ < m < ۶ (۴)

۰ < m < ۳ (۳)

m > ۳ (۲)

m < -۶ (۱)

۱۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

 $\sqrt{10}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۱)

۱۳) به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی

سراسری - ۱۳۹۳

 $x^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟ $-1, \frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}, 1$ (۳)

۱ (۲)

 $-\frac{9}{5}$ (۱)

۱۴) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴ (۴)

 $2\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)

۱۵) اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - \alpha + \beta$ کدام است؟

منتا - ۱۳۹۸

-۲ (۴)

۴ (۳)

صفر (۲)

۲ (۱)



۱۶) اگر در معادله $3x^2 - ax + b = 0$ ، بین اعداد a و b رابطه $2a + b = -12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام گزینه است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $-b$ ۲) $-\frac{b}{2}$ ۳) $-\frac{b}{3}$ ۴) $-\frac{b}{6}$

۱۷) به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟
سراسری - ۱۳۹۶

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸) به ازای کدام مقدار m ، در معادله‌ی $x^2 + 8mx + 4m + 8 = 0$ ، یکی از جواب‌ها، ۳ برابر جواب دیگر است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۹) به ازای چند عدد صحیح برای m ، معادله $mx^2 + 4x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه متمایز مثبت است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۲۰) به هر یک از جواب‌های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ دو واحد اضافه می‌کنیم. به حاصل ضرب آنها چند واحد اضافه می‌شود؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) مقداری اضافه نمی‌شود.

۲۱) اگر مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $x^3 + m(x^2 + 1) + 2x = m$ برابر ۱۲ باشد، m کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۶

- ۱) ± 2 ۲) $\pm \sqrt{5}$ ۳) ± 4 ۴) $\pm \sqrt{3}$



۲۲) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

است؟

۶ (۴)

-۶ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

۲۳) به ازای کدام مقدار a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو

سراسری - ۱۳۹۶

ریشه‌ی متمایز مثبت است؟

$5 < a < 14$ (۴)

$2 < a < 14$ (۳)

$2 < a < 5$ (۲)

$-2 < a < 2$ (۱)

۲۴) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، معادله‌ی $(x-1)(x^2 + ax - a + 1) = 0$ ، دو جواب

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

مثبت و یک جواب منفی دارد؟

$-1 < a < 0$ (۴)

$0 < a < 1$ (۳)

$a > -1$ (۲)

$a > 1$ (۱)

۲۵) اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

$A = \left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟

۸۴ (۴)

۴۰ (۳)

۳۲ (۲)

۲۰ (۱)

۲۶) اگر در معادله‌ی $x^2 - 12x + 8m^3 = 0$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر باشد، آن گاه

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲۷) اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 290x + m^2 = 0$ مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند،

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$\sqrt{m+1}$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)



۲۸) به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یک‌دیگرند؟
خارج از کشور - ۱۳۹۰

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲۹) به ازای کدام مقدار m ، مجموع معکوس ریشه‌های معادله $x(x+4) = m-1$ برابر (-13) است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۷

 $\frac{7}{26}$ (۴) $\frac{9}{26}$ (۳) $\frac{7}{13}$ (۲) $\frac{9}{13}$ (۱)

۳۰) اگر m و n جواب‌های معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند، مقدار عبارت جبری $m^2 + 7n - 2$ کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴۹ (۴)

۴۷ (۳)

۴۵ (۲)

۴۱ (۱)

۳۱) اگر $x = k$ جواب معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $2x^2 - 15kx - 1 = 0$ کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

 $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

۳۲) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله $(x+3)(mx^2 + 8x + m - 3) = 0$ دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۹

 $0 < m < 4$ (۴) $0 < m < 3$ (۳) $m > 0$ (۲) $m < 3$ (۱)

۳۳) اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $16a - 4b + c = 0$ بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه‌های این معادله کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۹

 $\frac{c}{4a}$ (۴) $-\frac{c}{4a}$ (۳) $\frac{c}{a}$ (۲) $-\frac{c}{a}$ (۱)



۳۴) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 6 = 0$ باشند، آنگاه حاصل $|\alpha| + |\beta|$

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

کدام می‌تواند باشد؟

۴) $\frac{\sqrt{33}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{29}}{2}$

۲) $\sqrt{29}$

۱) $\sqrt{33}$

۳۵) به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی

خارج از کشور - ۱۳۹۴

متمايز مثبت است؟

۴) $(4, +\infty) - \{5\}$

۳) $(4, +\infty)$

۲) $(-\infty, -4)$

۱) $(-\infty, -4) - \{-5\}$

۳۶) اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله $(x-2)(x^2 + mx + m + 3) = 0$ برابر

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

۴) سه

۳) دو

۲) یک

۱) صفر

۳۷) معادله $(x+1)(mx^2 - x - 2) = 0$ سه ریشه‌ی حقیقی متمايز دارد. اگر حاصل ضرب

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

ریشه‌های معادله از مجموع ریشه‌های آن $\frac{4}{3}$ واحد بیشتر باشد، مقدار m کدام است؟

۴) ۵

۳) ۴

۲) ۳

۱) ۲

۳۸) فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$

می‌توان تشکیل داد به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های هر معادله از

سراسری - ۱۴۰۰

حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله د، واحد بیشتر باشد؟

۴) ۱۸

۳) ۱۶

۲) ۱۵

۱) ۱۴

۳۹) فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ باشند و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ ریشه‌های

سراسری - ۱۴۰۰

کدام معادله هستند؟

۴) $125x^2 + 12x = 1$

۳) $125x^2 = 12x + 1$

۲) $125x^2 = 16x + 1$

۱) $125x^2 + 16x = 1$



۴۰) معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع

سراسری - ۱۳۹۹

ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) $-\frac{5}{2}$

۴۱) معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام

خارج از کشور - ۱۳۹۹

است؟

- ۱) $(-4, 0)$ ۲) $(-4, -2)$ ۳) $(-6, 0)$ ۴) $(-6, -4)$

۴۲) اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت

متنا - ۱۳۹۸

$\alpha - 1$ و $\beta - 1$ هستند؟

- ۱) $x^2 - 2x - 7 = 0$ ۲) $x^2 + x - 1 = 0$ ۳) $x^2 - x - 1 = 0$ ۴) $x^2 - x - 7 = 0$

۴۳) اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 + kx + 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، ریشه‌های

متنا - ۱۳۹۴

معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ است؟

- ۱) -۱۲ ۲) -۱۴ ۳) -۱۰ ۴) -۸

۴۴) ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد

سراسری - ۱۳۹۴

کمتر است؟

- ۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ ۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۴۵) اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، جواب‌های کدام معادله به صورت

متنا - ۱۳۹۷

$\{\alpha\sqrt{\beta}, \beta\sqrt{\alpha}\}$ است؟

- ۱) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - \sqrt{5}x + 5 = 0$ ۴) $x^2 + \sqrt{5}x - 5 = 0$



۴۶ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x - 5 = 0$ از مجذور ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + k = 0$ یک واحد کم‌تر است. k کدام است؟
منبع قلم‌چی - ۱۳۹۶

- ① $\frac{1}{2}$ ② ۱ ③ ۲ ④ $-\frac{1}{2}$

۴۷ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند، کدام است؟
منتا - ۱۳۹۶

- ① $x^2 - 58x + 16 = 0$ ② $x^2 - 58x + 4 = 0$ ③ $x^2 - 29x + 16 = 0$ ④ $x^2 - 29x + 4 = 0$

۴۸ اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + c = 0$ از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + bx + 2 = 0$ ، به اندازه‌ی یک واحد بیشتر باشند، $b - c$ کدام است؟
منتا - ۱۳۹۴

- ① -۵ ② ۱۵ ③ -۱۵ ④ ۵

۴۹ به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟
خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ① ۹ ② ۱۱ ③ ۱۳ ④ ۱۵

۵۰ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(x - 3) = -1$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + 3 = 0$ به صورت $\{\alpha\sqrt{\beta}, \beta\sqrt{\alpha}\}$ است؟
منبع قلم‌چی - ۱۳۹۷

- ① $3\sqrt{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $-3\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$

۵۱ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\sin^2 15^\circ$ و $\cos^2 15^\circ$ می‌باشند، کدام است؟

- ① $8x^2 - 8x + 1 = 0$ ② $6x^2 - 6x + 1 = 0$ ③ $16x^2 - 16x + 1 = 0$ ④ $12x^2 - 12x + 1 = 0$
منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸



(۵۲) اگر ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 + 8x + m - 1 = 0$ نصف ریشه‌های معادله‌ی

منتا- ۱۳۹۴

$x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، m کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

(۵۳) معادله‌ای که جواب‌هایش از قرینه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x(x+1) = 3$ یک واحد کم‌تر است،

منبع قلم‌چی- ۱۳۹۵

کدام است؟

- (۱) $x^2 + x - 3 = 0$ (۲) $x^2 - x - 3 = 0$ (۳) $x^2 - 3x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 3x + 1 = 0$

(۵۴) معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن از ۳ برابر قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ دو

منتا- ۱۳۹۹

واحد بیش‌تر باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (۳) $x^2 + 8x - 11 = 0$ (۴) $x^2 - 8x + 4 = 0$

(۵۵) اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2 + ax + b = 0$ از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی

منتا- ۱۳۹۵

$2x^2 - 3x - 9 = 0$ دو واحد کم‌تر باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۱ (۳) ۴۲ (۴) ۱۷

(۵۶) اگر α, β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 1 = 0$ بوده و داشته باشیم $P = \alpha\beta$ و

$S = \alpha + \beta$ به ازای کدام مقدار k جواب‌های معادله‌ی $25x^2 - 5kx - 1 = 0$ برابر

منبع قلم‌چی- ۱۳۹۴

است؟ $\frac{\alpha}{2S+P}, \frac{\beta}{3S+4P}$

- (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) ۱

(۵۷) قدرمطلق تفاضل حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله‌ی $(x^2 + 3x)^2 - 8 = 7x^2 + 21x$

منتا- ۱۳۹۸

کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



۵۸) به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۳

- ۱) -۴ ۲) -۱۲, ۴ ۳) ۱۲, -۴ ۴) ۱۲

۵۹) معادله $(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 1) - 20 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟ منتا- ۱۳۹۸

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰) مجموع جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x = 1$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) صفر منبع قلم چی- ۱۳۹۵

۶۱) معادله $(x - \sqrt{x})^2 + 2(x - \sqrt{x}) = 0$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ منبع قلم چی- ۱۳۹۸

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۲) به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله $\frac{1}{4}x^4 + mx^2 + m^2 - 1 = 0$ فقط دارای دو جواب حقیقی متمایز است؟

منبع قلم چی- ۱۳۹۹

- ۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ۳) $(0, +\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۳) حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $(3x^2 + 2x + 1)^2 - 14x = 15 + 21x^2$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{14}{9}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{7}{3}$ منبع قلم چی- ۱۳۹۹

۶۴) مجموع مربعات ریشه‌های معادله $(x-1)^4 + 2x = x^2 + 7$ کدام است؟ منتا- ۱۳۹۸

- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲



۶۵) اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = x^2 - 6x + 2$ باشند، مجموع ریشه‌های معادله

$$\alpha x^4 + 13x^2 - \beta = 1$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) این معادله، فاقد ریشه است.

۶۶) به ازای کدام مقادیر m ، معادله $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز

منتهی - ۱۳۹۸

است؟

۱) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$ ۲) $(-\infty, 1) - \{\frac{1}{2}\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{1\}$ ۴) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

تابع درجه دوم و کاربردهای آن

۶۷) اگر نقطه‌ی $S(1, -2)$ رأس سهمی $x^2 + 2ax + y + b = 0$ باشد، $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۲) ۲

۳) -۲

۴) صفر

۶۸) تابع درجه دوم $y = x^2 + \frac{c}{2}x + 8$ نسبت به خط $x = 3$ متقارن است. این تابع محور x ها را در

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

چه طولی قطع می‌کند؟

۴) ۶

۳) -۱

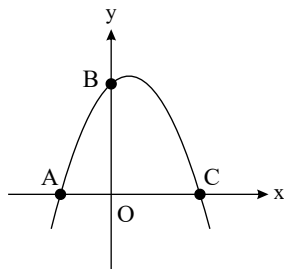
۲) ۳

۱) ۲

۶۹) نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ به شکل زیر مفروض است. مقدار

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$A + B + C$ کدام است؟



۱) ۱۵

۲) ۱۳

۳) ۱۱

۴) ۷



۷۰ خط $y = ۲$ بر نمودار تابع $y = ax^2 + ۳x + (a + ۲)$ ، در پایین ترین نقطه‌ی آن مماس است.

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

کدام است؟

۴ $-\frac{۵}{۴}$

۳ $\frac{۵}{۲}$

۲ $\frac{۳}{۲}$

۱ $-\frac{۳}{۲}$

۷۱ به ازای چه حدودی از a ، نمودار $y = ax^2 + ۲x + a$ همواره بالای محور x ها قرار دارد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۲ $\emptyset$

۱ $(۱, +\infty)$

۴ $(-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$

۳ $(-۱, ۱)$

۷۲ بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + ۴x + ۵$ برابر ۹ است. معادله‌ی

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

محور تقارن این تابع کدام است؟

۴ $x = ۴$

۳ $x = ۳$

۲ $x = ۲$

۱ $x = -۱$

۷۳ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k ، خط $y = -۲$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

$f(x) = kx^2 + ۲\sqrt{۲}x + k - ۱$ بر سهمی مماس است؟

۴ $\emptyset$

۳ $\{-۲, ۱\}$

۲ $\{-۲\}$

۱ $\{-۱\}$

۷۴ اگر مجموع طول نقاط تلاقی سهمی $y = ۲x^2 + (۲ - m)x + m$ با محور x ها برابر m باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

حاصل ضرب طول این نقاط کدام است؟

۴ $-\frac{۱}{۲}$

۳ $\frac{۱}{۲}$

۲ -۱

۱ ۱

۷۵ منحنی $y = x^2 + ۷x + ۱۰$ را چند واحد به طرف راست منتقل کنیم تا نقاط برخورد آن با

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$y = \sqrt{x}$ دو نقطه با طول‌های مثبت باشند؟

۴ ۵ واحد

۳ کمتر از $۳,۵$ واحد

۲ بیش از ۵ واحد

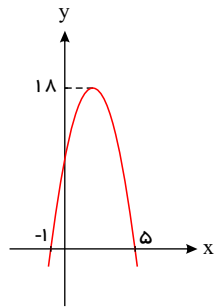
۱ $۳,۵$ واحد



۷۶) اگر شکل داده شده نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، آن گاه حاصل عبارت

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$A = -3a + \frac{b}{2} - c \text{ کدام است؟}$$



۴ (۳)

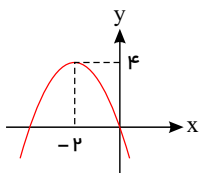
۲ (۲)

۱ (۱) صفر

۴ (۴) -۲

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

۷۷) با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ، مقدار a کدام است؟



۲ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۷۸) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (k+1)x + k + 4 = 0$ ، اگر حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ برابر

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

مجموع ریشه‌ها باشد، آن گاه تابع $f(x) = kx^2 - 4x + 1$ چگونه است؟

۱) ماکسیمم برابر ۳ دارد. ۲) مینیمم برابر ۳ دارد. ۳) ماکسیمم برابر ۱- دارد. ۴) مینیمم برابر ۱- دارد.

۷۹) به ازای چه حدودی از a تابع درجه‌ی دوم $f(x) = (a-1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (a+1)$ از ناحیه‌ی سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

$a > 1$ (۴)

R (۳)

$1 \leq a \leq 2$ (۲)

$a \geq 2$ (۱)

۸۰) به ازای چه مقادیری از m ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - (m+1)x + 1$ در نقطه‌ای واقع در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات، کم‌ترین مقدار خود را دارد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$m > 3$ (۴)

$1 < m < 3$ (۳)

$-1 < m < 3$ (۲)

$-1 < m < 1$ (۱)

۸۱) اگر نقاط برخورد تابع $f(x) = 0.5x^2 + x - 7.5$ با محورهای مختصات رئوس یک مثلث

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

باشند، مساحت مثلث مورد نظر کدام است؟

۹۰ (۴)

۳۰ (۳)

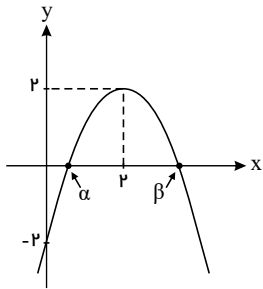
۶۰ (۲)

۱۵ (۱)



۸۳) با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حاصل عبارت $\alpha\beta^3 + 2\alpha^2$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۲۴ (۱)

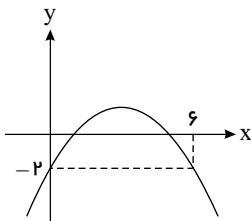
۴۲ (۲)

۱۲ (۳)

۴۰ (۴)

۸۴) اگر صفرهای تابع درجه دوم زیر جملات چهارم و هشتم یک دنباله حسابی باشند، مجموع جمله دوم و دهم این دنباله حسابی کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹



۳ (۲)

۱۲ (۴)

۶ (۱)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۸۵) به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + mx + 1$ فقط از ناحیه سوم نمی گذرد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$\emptyset$ (۴)

$m < 0$ (۳)

$0 < m < 1$ (۲)

$m > 1$ (۱)

۸۶) در صورتی که منحنی تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ ، محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

$a > \frac{3}{2}$ (۴)

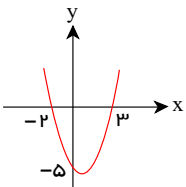
$a < \frac{3}{2}$ (۳)

$2 < a < 6$ (۲)

$a < 2$ یا $a > 6$ (۱)

۸۷) شکل زیر، نمودار تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می دهد. حاصل

منبع قلم چی - ۱۳۹۴



-۵ (۲)

-۶ (۴)

۵ (۱)

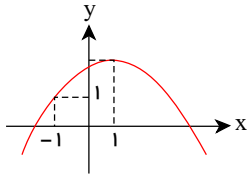
۶ (۳)

$a + b + c$ کدام است؟



۸۸ در سهمی شکل مقابل به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a - b = -3$ آنگاه $f(1)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۴



کدام است؟

۴ (۳)

۰ (۲)

-۴ (۱)

۵ (۴)

۸۹ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها

خارج از کشور - ۱۳۹۶

است؟

-۲ < a < ۱ (۴)

a > ۳ (۳)

a < -۲ (۲)

a < ۱ (۱)

۹۰ اگر نمودار $y = x^2 - 2mx + m + 2$ جهت منفی محور x ها را در دو نقطه قطع کند، حدود m

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

کدام است؟

۱ < m < ۲ (۴)

۰ < m < ۱ (۳)

-۱ < m < ۰ (۲)

-۲ < m < -۱ (۱)

۹۱ به ازای کدام مقادیر m ، دهانه سهمی به معادله $y = (m + 1)x^2 - 4x + (m - 2)$ رو به بالا

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

بوده و محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع می کند؟

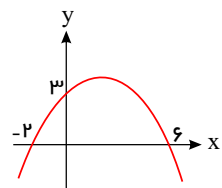
(-۲, -۱) (۴)

(-۱, ۴) (۳)

(-۲, ۳) (۲)

(-۱, ۳) (۱)

متنا - ۱۳۹۸



۹۲ بیشترین مقدار y در سهمی شکل مقابل کدام است؟

۵ (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

۴ (۱)

$\frac{9}{2}$ (۴)

۹۳ اگر نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ به صورت زیر باشد، مجموع ریشه های معادله

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

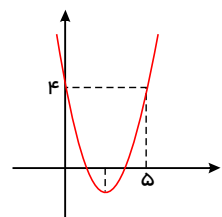
$f(x) = 0$ چقدر از حاصل ضرب آنها بیشتر است؟

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$\frac{5}{2}$ (۴)

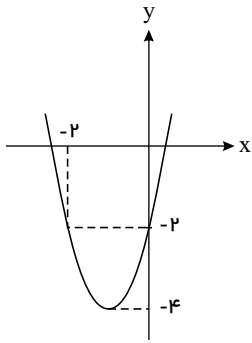




۹۵) با توجه به شکل زیر که مربوط به تابع درجه دوم f است، حاصل ضرب ریشه‌های معادله $f(x) = 0$

کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۳) $-\frac{2}{3}$

۲) -1

۱) -2

۴) $-\frac{3}{2}$

۹۶) رأس سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور x ها به ترتیب سه رأس

A ، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند، طول میانه CM کدام است؟ (نقطه B نسبت به نقطه C ،

به مبدأ نزدیک‌تر است.)

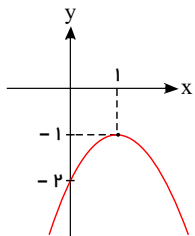
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۳) $2\sqrt{10}$

۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۱) $\sqrt{10}$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۹۷) ضابطه سهمی مربوط به شکل زیر کدام است؟

۲) $f(x) = -2x^2 - 2x - 1$

۱) $f(x) = -2x^2 + x - 2$

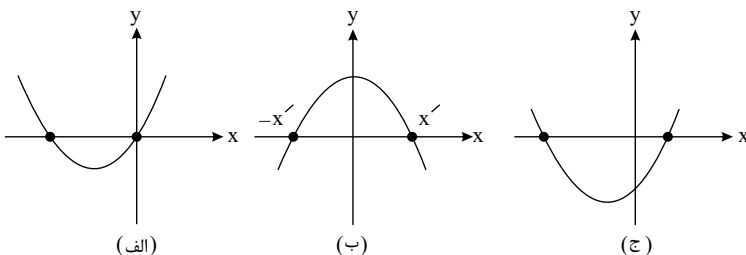
۴) $f(x) = -x^2 + x - 2$

۳) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

۹۸) نمودارهای زیر مربوط به توابع درجه دوم به معادله کلی $y = ax^2 + bx + c$ هستند، در چند

مورد از آن‌ها حاصل abc منفی است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۹۹) نقطهٔ ماکسیمم تابع $y = mx^2 - x + 1$ در ناحیهٔ دوم مختصات قرار می‌گیرد. تمام حدود m

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

کدام است؟



۱۰۱) اگر مینیمم سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ بر ماکسیمم سهمی به معادله

$$g(x) = -x^2 + 4x - 5$$
 منطبق بوده و فاصله بین نقاط تقاطع منحنی f با محور x ها،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۶ واحد باشد، مجموع ضرایب ضابطه سهمی $f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$

۲) $-\frac{2}{9}$

۳) $-\frac{5}{9}$

۴) $-\frac{8}{9}$

۱۰۲) به ازای چه حدودی از a ، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 - (a - 4)x + \frac{9}{4}$ فقط از ناحیه‌ی

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-1 < a < 0$

۲) $-2 < a < -1$

۳) $1 < a < 2$

۴) $0 < a < 1$

۱۰۳) اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - kx + 1$ با

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟

۱) ± 2

۲) $\pm 2\sqrt{2}$

۳) ± 4

۴) $\pm \sqrt{2}$

۱۰۴) به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 2(x + a) - 1$ در ربع

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

سوم قرار دارد؟

۱) $-1 < a < \frac{1}{2}$

۲) $-\frac{1}{2} < a < 1$

۳) $0 < a < 1$

۴) $a > 0$

۱۰۵) اگر عبارت $y = ax(x + 1) + 1$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

داد؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۲

۴) صفر

۱۰۶) مجموع مربعات صفرهای تابع درجه‌ی دو مقابل کدام است؟

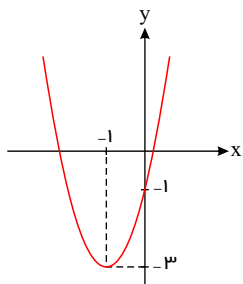
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

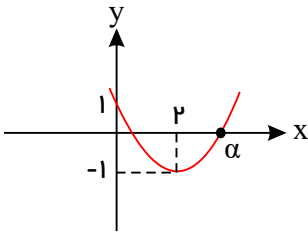
متنا - ۱۳۹۸





۱۰۷) باتوجه به شکل روبه رو که نمودار یک تابع درجه‌ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵



$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

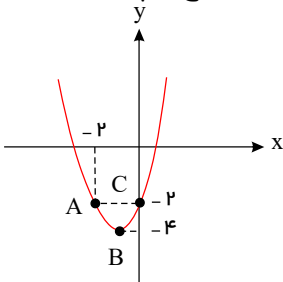
$$\frac{4 + \sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

۳ (۱)

$2 + \sqrt{2}$ (۳)

۱۰۸) نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی

منبع قلم چی - ۱۳۹۶



$f(x) = 0$ کدام است؟

۵ (۱)

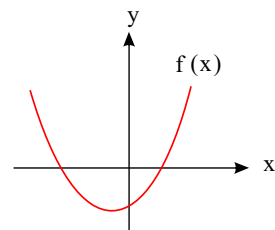
۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

۱۰۹) اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با نمودار زیر باشد، کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



$$\alpha^3 + \beta^3 < 0 \quad (2)$$

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\Delta}{4a} \quad (4)$$

$$abc > 0 \quad (1)$$

$$\frac{b^2}{4} < ac \quad (3)$$

گزینه صحیح است؟

۱۱۰) فرض کنید نقاط $(-2, 5)$, $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این

سراسری - ۱۳۹۹

سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

$(2, 15)$ (۴)

$(2, 9)$ (۳)

$(-1, 4)$ (۲)

$(-1, 3)$ (۱)



۱۱۱) فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟
خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱) $(5, -7)$ ۲) $(5, -9)$ ۳) $(2, 5)$ ۴) $(1, 5)$

معادلات و نامعادلات

۱۱۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $mx^2 - x + m = 3$ باشند و داشته باشیم: $\alpha < 1 < \beta < 2$ ، محدوده m کدام است؟
منتا - ۱۳۹۸

- ۱) $0 < m < 1$ ۲) $1 < m < 2$ ۳) $-1 < m < 0$ ۴) $-2 < m < -1$

۱۱۳) به ازای چه مقادیری از m ، جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + (m - 1)x + \frac{1}{4}$ به صورت زیر است؟
منتا - ۱۳۹۸

x	x_1	x_2
$f(x)$	- ۰ + ۰ -	
	$(-1, 2)$ ۴	$(-1, 3)$ ۳

- ۱) $(-\infty, 3)$ ۲) $(2, 3)$ ۳) $(-1, 3)$ ۴) $(-1, 2)$

۱۱۴) اگر جدول تعیین علامت عبارت $f(x) = -3x^2 + 4ax + b$ به صورت زیر باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟
منتا - ۱۳۹۹

x	۲
$f(x)$	- ۰ -
	۲۴ ۴

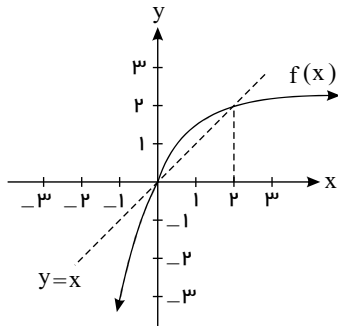
- ۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۲۴

۱۱۵) در بازه (b, a) مقادیر سهمی $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$ کوچک تر از $\frac{-5}{2}$ است. بیش ترین مقدار $a - b$ کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۱۶ مجموعه جواب نامعادله $x^2 - xf(x) < 0$ به کدام صورت است؟

- ۱ $(-\infty, 0)$
 ۲ $(0, 2)$
 ۳ $(2, +\infty)$
 ۴ $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

۱۱۷ مجموعه جواب نامعادله $(\frac{1}{3}x + 4)(\sqrt{x} + 1) > x + x\sqrt{x}$ شامل چند عدد صحیح مضرب

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۳ می باشد؟

- ۱ ۱
 ۲ ۲
 ۳ ۳
 ۴ بی شمار

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۱۸ مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ صفر
 ۲ یک
 ۳ دو
 ۴ بی شمار

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۱۱۹ مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{2-x}$ کدام است؟

- ۱ $(-\infty, 1)$
 ۲ $(1, 2)$
 ۳ $(2, +\infty)$
 ۴ $\mathbb{R} - [1, 2]$

۱۲۰ اگر نامعادله $\frac{2ax^2 - ax - 6}{x^2 + x + 1} \geq -6$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، a کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ صفر
 ۲ ۶
 ۳ -۳
 ۴ ناموجود

۱۲۱ اگر نامعادله $\frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + 2x + b} > 0$ به ازای تمام x های حقیقی برقرار بوده و a و b اعداد صحیح

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

باشند، آنگاه حداقل مقدار صحیح $a + b$ کدام است؟

- ۱ -۱
 ۲ صفر
 ۳ ۱
 ۴ ۲



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۲۲ مجموعه جواب نامعادله $x \leq \frac{x^2}{x-1} < 1$ کدام است؟

- ① $[0, 1)$ ② $(-\infty, 0]$ ③ $(-2, 0]$ ④ $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

سراسری - ۱۳۹۸

۱۲۳ مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ به کدام صورت است؟

- ① $\mathbb{R} - [-6, 4]$ ② $\mathbb{R} - [-4, 6]$ ③ $x > 4$ ④ $x < -6$

۱۲۴ مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت بازه، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ① $(-4, 1) \cup (2, 3)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-1, 2) \cup (2, 4)$ ④ $(-1, 2)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۱۲۵ چند عدد صحیح در نامعادله $\frac{x^3}{1+x^2} \leq \frac{x^4}{1+x^3}$ صدق می‌کند؟

- ① صفر ② یک ③ دو ④ بی‌شمار

خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۲۶ مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3$ کدام است؟

- ① $(0, +\infty)$ ② $(4, +\infty)$ ③ $\mathbb{R} - [-4, 0]$ ④ $\mathbb{R} - [-4, -1]$

سراسری - ۱۳۹۹

۱۲۷ مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ کدام است؟

- ① $(0, 6, 1, 5)$ ② $(0, 8, 1, 2)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(0, 8, 2)$

۱۲۸ اگر دو ماشین چمن‌زنی باهم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند.

با فرض اینکه سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، چند ساعت طول می‌کشد تا ماشین کندتر به

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

تنهایی این کار را انجام دهد؟

- ① ۶ ② ۱۰ ③ ۱۲ ④ ۱۵



۱۲۹) به ازای کدام مقدار m ، یک ریشه معادله $\frac{m}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+4}{x^2-x-2}$ از قرینه ریشه

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

دیگر یک واحد بیش تر است؟

۴) -۳

۳) -۲

۲) ۳

۱) ۲

۱۳۰) اگر a ریشه معادله $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+5}$ باشد، حاصل $\frac{4a+1}{a}$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

است؟

۴) ۴٫۵

۳) ۳٫۵

۲) ۲٫۵

۱) ۱٫۵

۱۳۱) در یک استخر، سه نوع شیر A ، B و C برای پر کردن آب استخر وجود دارد. اگر هر سه شیر با

هم باز باشند، استخر در ۲ ساعت و اگر فقط شیر A و B باز باشند و شیر C بسته باشد، استخر در ۶

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

ساعت پر می شود. شیر C به تنهایی استخر را در چند ساعت پر می کند؟

۴) ۹ ساعت

۳) ۳ ساعت

۲) ۶ ساعت

۱) ۴ ساعت

۱۳۲) بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در

۲۰ ساعت این کار انجام می شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟ سراسری - ۱۳۹۸

۴) ۳۶

۳) ۳۵

۲) ۳۳

۱) ۳۲

۱۳۳) در یک لیگ فوتبال، مسابقات به این ترتیب است که هر تیم، با تیم های دیگر لیگ تنها یک بازی

انجام می دهد و در نهایت پس از رده بندی، سه تیم اول لیگ هر کدام یک بار با هم مسابقه می دهند؛ اگر

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

مجموع تعداد مسابقات برگزار شده ۶۹ باشد، این لیگ چند تیم دارد؟

۴) ۱۶

۳) ۱۴

۲) ۱۲

۱) ۱۰

۱۳۴) به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{a+1}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} = 1$ ریشه مضاعف دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۲) ۱

۱) ۲

۴) مقداری برای a یافت نمی شود.

۳) صفر



۱۳۵) معادله $\frac{x^2 + ax + 4}{x^2 - 2x - 3} = 0$ فقط یک ریشه دارد. چند مقدار برای a ممکن است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۶) اگر مجموعه جواب معادله $\frac{m+1}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2}$ تهی باشد، مقدار m برابر کدام گزینه

می تواند باشد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ (۱) صفر ۱ (۲) $\frac{11}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۷) سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ (۱) ۱۲ ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۸) یکی از ریشه های معادله $x^2 + x + \frac{4}{x^2 + x + 2} + m = 0$ برابر ۲- است. مجموع ریشه

های این معادله کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ (۱) ۲- ۱ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴) -۴ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۳۹) نگین، پازلی را به تنهایی ۶ ساعت زودتر از امیر، کامل می کرد. پس از پنج ماه تمرین، سرعت نگین و امیر در تکمیل پازل به ترتیب ۳ و ۲ برابر شده است به طوری که هردو باهم، همان پازل را در ۴ ساعت کامل می کنند. در حال حاضر اختلاف مدت زمانی که طول می کشد تا هریک به تنهایی پازل را کامل کنند، چند ساعت است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ (۱) ۲ ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱۴۰ پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟
خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۵ (۴)

۱۳٫۵ (۳)

۱۲٫۵ (۲)

۱۲ (۱)

۱۴۱ از معادله $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 1$ مقدار x کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۳٫۷۵ (۴)

۳٫۵ (۳)

۳٫۲۵ (۲)

۲٫۷۵ (۱)

۱۴۲ جواب معادله $\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ در کدام بازه قرار دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(۵٫۷) (۴)

(-۱٫۲) (۳)

(۳٫۶) (۲)

(۰٫۳) (۱)

۱۴۳ اگر $3x = 2 - \sqrt{2x+3}$ باشد، حاصل $9x + 3$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۴ به ازای چند مقدار a ، $x = -1$ جواب معادله $\sqrt{x^2 + ax + 17} = ax - 2$ است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸ ۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۴۵ اگر $3 = \sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16}$ ، حاصل $\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸ ۲۴ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

۱ (۱)

۱۴۶ اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ ، کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۸

۴٫۵ (۴)

۳٫۵ (۳)

۲٫۵ (۲)

۱٫۵ (۱)

۱۴۷ معادله $\sqrt{3x-2x^2} + \frac{1}{\sqrt{3x-2x^2}} = 2$ دارای چند ریشه طبیعی است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۱۴۸) تعداد جواب‌های معادلهٔ رادیکالی $\sqrt{4x-3} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x}$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۹) اگر $1 = \sqrt{3a+16} + 2a$ باشد، عدد $4a+9$ ، کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱ خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۵۰) معادلهٔ $1 + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

- ۱) یک ریشهٔ مثبت دارد. ۲) یک ریشهٔ منفی دارد. ۳) دو ریشهٔ حقیقی دارد. ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد. منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۱) حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{-(x+3)(2x+1)} = (x+1)(2x+5)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{11}{2}$ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۷ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۲) تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{3x^2+2x-1} + \sqrt{2x+2+3x^2} = 1$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۳) اگر $x=a$ جواب معادلهٔ رادیکالی $1 = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5}$ باشد، حاصل a^2+a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۵۴) مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-8 = \sqrt{x^2+x+4}$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۱۵۵) معادلهٔ $x^2+3 = 2x + \sqrt{x^2-2x+5}$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ منبع قلم چی - ۱۳۹۹



۱۵۶ برای این که به جذر عددی مفروض یک واحد اضافه شود، باید به خود عدد دو واحد اضافه کرده و از آن جذر بگیریم. مجموع این عدد و جذر آن کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$$\frac{7}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۳)}$$

$$۶۱ \text{ (۲)}$$

$$۱۲ \text{ (۱)}$$

۱۵۷ معادله $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^3 - ax + a - 2} = 0$ فقط یک ریشه دارد. مقدار a کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$$۳ \text{ (۲)}$$

$$۱ \text{ (۱)}$$

$$\text{مقداری برای } a \text{ یافت نمی‌شود. (۴)}$$

$$۶ \text{ (۳)}$$

۱۵۸ مجموع تمام اعدادی که «از جذر خود $\frac{1}{8}$ واحد کم تر هستند»، کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$۱ \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

۱۵۹ فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات کدام است؟ سراسری - ۱۴۰۰

$$\sqrt{۱۵} \text{ (۴)}$$

$$۲\sqrt{۳} \text{ (۳)}$$

$$\sqrt{۶} \text{ (۲)}$$

$$\sqrt{۳} \text{ (۱)}$$

نمودار توابع قدر مطلقى

۱۶۰ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۵

$$۳ \text{ (۴)}$$

$$\frac{۸}{۳} \text{ (۳)}$$

$$\frac{۷}{۳} \text{ (۲)}$$

$$۲ \text{ (۱)}$$

۱۶۱ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله‌ی $y = 3$ کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۵

$$۶ \text{ (۴)}$$

$$۴,۵ \text{ (۳)}$$

$$۴ \text{ (۲)}$$

$$۳ \text{ (۱)}$$

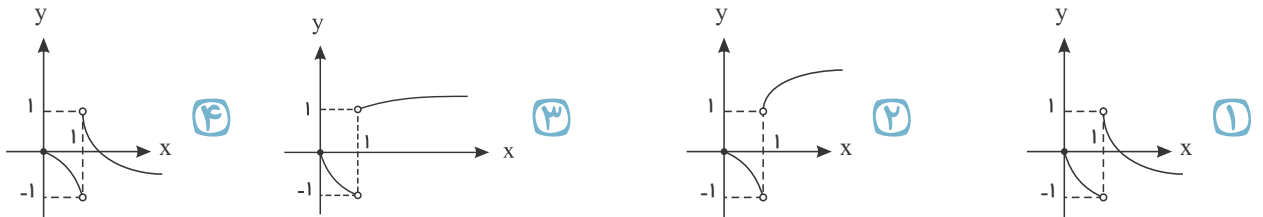


۱۶۲ اگر مجموعه‌ی $\{x \in R \mid -2 < x < 2\}$ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 3x$ باشد،

آن گاه برد تابع با ضابطه‌ی $y = |f(x)|$ کدام بازه است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ① $(-2, 10)$ ② $(2, 10)$ ③ $[0, 10)$ ④ $(\frac{9}{4}, 10)$

۱۶۳ نمودار تابع $f(x) = \frac{|x-1|\sqrt{x}}{x-1}$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷



۱۶۴ کدام خط، تابع $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x < 0 \\ |x-1|+1 & ; 0 \leq x < 3 \\ 7-x & ; x \geq 3 \end{cases}$ را در تعداد نقاط بیش‌تری قطع می‌کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $y = 0$ ② $y = 1$ ③ $y = 2$ ④ $y = 3$

۱۶۵ نمودار تابع $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + |x+1|$ در بازه‌ی $[a, b]$ موازی محور x ها می‌باشد،

ماکسیمم مقدار $(b-a)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۶۶ تابع $f(x) = |x| + |x-1|$ مفروض است. نمودار تابع $y = f(|x|)$ با محور x ها و دو خط

$x = -1$ و $x = 1$ چه مساحتی می‌سازد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۶



۱۶۷) مساحت ایجاد شده بین نمودار تابع $y = x + 2|x|$ و خط $y = x + a$ برابر ۲ واحد مربع است.

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

مقدار a کدام است؟ ($a > 0$)

۵/۲ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۳/۲ (۱)

۱۶۸) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۵

۶ (۴)

۱۶/۳ (۳)

۴ (۲)

۸/۳ (۱)

۱۶۹) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{2}x + 2$ ، کدام

سراسری - ۱۳۹۹

است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۷۰) نمودارهای دو تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ و $y = x + 7$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند.

خارج از کشور - ۱۳۹۹

اندازه‌ی پاره‌خط AB ، کدام است؟

۱۰√۲ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۸√۲ (۱)

معادلات و نامعادلات قدر مطلق

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

۱۷۱) مجموع جواب‌های معادله‌ی $|2x + 1| = |x - 2|$ کدام است؟

-۸/۳ (۴)

۸/۳ (۳)

-۷/۳ (۲)

۷/۳ (۱)

۱۷۲) اگر جواب نامعادله $||x - 1| - 2| \leq 5$ را به صورت بازه $[a, b]$ نشان دهیم، حاصل $b - a$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)



۱۷۳ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1$ ، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر)

- ۱ $(1, \frac{3}{2})$ ۲ $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}) \cup (1, \frac{3}{2})$ ۳ $(1, \frac{5}{3})$ ۴ $(\frac{5}{3}, 2)$ سراسری - ۱۳۹۵

۱۷۴ مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-2| + 6 \leq (x-2)^2$ بازه‌ی $[a, b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴ ۳

۱۷۵ مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2 + 1| > |x-2| + 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

- ۱ $(-2, 1)$ ۲ $(-1, 1)$ ۳ $(-1, 2)$ ۴ $(1, 2)$ خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱۷۶ مجموعه جواب نامعادله‌ی $x < |x| - 1$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ۱ $(-\frac{1}{2}, 1)$ ۲ $[0, 1)$ ۳ $(-\infty, 1)$ ۴ $\emptyset$

۱۷۷ مجموع جواب‌های معادله‌ی $|x-1| + |x-3| = 5$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ۱ جواب ندارد. ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ ۴

۱۷۸ می‌دانیم معادله‌ی $|x^2 - 3| = |2-a| - 1$ برای x جواب حقیقی دارد، مجموعه تمام مقادیر

ممکن برای a کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱ $(0, 3)$ ۲ $\mathbb{R} - [0, 3]$ ۳ $[1, 2]$ ۴ $\mathbb{R} - (1, 3)$

۱۷۹ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$ ، دامنه‌ی تعریف تابع $f(-x)$ کدام است؟ خارج از کشور - ۱۳۹۲

- ۱ $x \leq -1$ ۲ $x \geq -1$ ۳ $x \leq 1$ ۴ $x \geq 1$



۱۸۰ مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 2x < |x - 2|$ به صورت کدام بازه است؟ خارج از کشور - ۱۳۹۲

- ۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-1, 2)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(1, 2)$

۱۸۱ مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x+8}{2x+1} \right| \leq x$ شامل چند عدد صحیح است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۶

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) بی شمار

۱۸۲ اگر مجموع جواب نامعادله $x^2 - x - 6 < 0$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه جواب نامعادله

$|x| < m$ باشد، کم‌ترین مقدار m چه قدر است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۳ مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| < x^2 + 1$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ۲) $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$ ۳) $(-2, 0)$ ۴) $\mathbb{R} - [-2, 0]$

۱۸۴ مجموع جواب‌های معادله $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ ، کدام است؟ خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۸۵ در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$

است. طول نقطه‌ی وسط این بازه کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۷

- ۱) -۲ ۲) -۱٫۵ ۳) -۱ ۴) -۰٫۵

۱۸۶ مجموعه جواب نامعادله $|x| - 3 + x^2 \leq 6x - 3$ به صورت $[a, b]$ است. مقدار $b - a$

کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱



۱۸۷ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 1| \leq |x + 1|$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۴ (۴) بیشمار

۲ (۳)

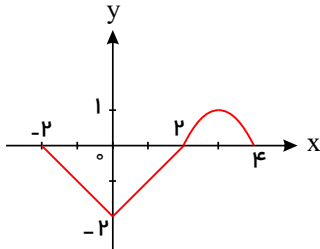
۳ (۲)

۴ (۱)

۱۸۸ اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حدود m کدام باید باشد تا معادله

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$|f(2x) + 1| - m = 0$ ، چهار ریشه داشته باشد؟



۱ (۱) $0 \leq m \leq 1$

۲ (۲) $0 \leq m \leq 2$

۳ (۳) $0 < m \leq 1$

۴ (۴) $0 < m \leq 2$

۱۸۹ اگر معادله $|3 - |x - 1|| = k - 2$ دقیقاً سه جواب داشته باشد، مقدار k کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

۱۹۰ در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین

سراسری - ۱۳۹۹

مقدار $b - a$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۹۱ در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیشترین مقدار

خارج از کشور - ۱۳۹۹

$b - a$ ، کدام است؟

۴ (۴) $\frac{5}{2}$

۲ (۳)

۲ (۲) $\frac{3}{2}$

۱ (۱)



جزء صحیح و خواص آن

۱۹۲ اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = x - [x]$ ، آن گاه ضابطه ی تابع $y = fog(x)$ برابر کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

- ① $f(x)$ ② $g(x)$ ③ $(f + g)(x)$ ④ $(f - g)(x)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۹۳ حاصل $M = \left[\frac{\left[\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} \right]}{\left[\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right]} \right]$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

- ① ۶ ② ۵ ③ ۸ ④ ۷

۱۹۴ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، حاصل $\left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] - 2 \left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right]$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۱

$([])$ ، نماد جزء صحیح است.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۹۵ اگر $\left[x + \frac{1}{2} \right] = -2$ باشد، حاصل $[2x]$ کدام می تواند باشد؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ① -۲ ② -۴ ③ -۶ ④ -۱

۱۹۶ اگر $\left[\frac{1-x}{x} \right] = 1$ ، آن گاه تعداد مقادیر ممکن برای عبارت $[-6x]$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

صحیح است.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۶



۱۹۷) اگر $f(x) = 2x - [x]$ و $g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$ ، آن گاه $(fog)(2)$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است. منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ۱) $4(\sqrt{2} - 1)$ ۲) $4(1 - \sqrt{2})$ ۳) ۴ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۹۸) اگر $|2x + 1| < 1$ حاصل $[x] + [x^2]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱ منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۱۹۹) اگر $(gof)(x) = x - [x]$ و $f(x) = x^3 - \sqrt{2}$ ، آن گاه حاصل $g(\sqrt{2})$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است. منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) $\sqrt{2} - 1$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۰۰) اگر $\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1$ باشد، حاصل $\left[\frac{x+2}{x} \right]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱) فقط ۳ ۲) فقط ۲ ۳) ۱ یا ۲ ۴) ۲ تا ۳ منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۲۰۱) اگر $|1 - x^2| < 1 - x$ ، آن گاه حاصل $[x]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱) صفر ۲) -۱ یا -۲ ۳) صفر یا -۱ ۴) -۲ منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۲۰۲) اگر $f(x) = x^2 - x$ ، $g(x) = [x+1] + [-x]$ ، آن گاه برد تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است. منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۳) اگر $-3 < 1 - 2x < -1$ باشد، آن گاه حاصل $[\sqrt{x+4}]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است. منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) ۲ یا ۳ ۲) ۲ یا ۳ ۳) فقط ۱ ۴) فقط ۲



۲۰۴ اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x - [x]$ آن گاه حاصل $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است) منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱ (۱) -1 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2(1 + \sqrt{2})$ (۴)

۲۰۵ اگر $|2x - 1| < x$ باشد، آن گاه مجموعه‌ی مقادیر $\left[\frac{x-1}{3} \right]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱ (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{0, -1\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\{0, 1\}$

۲۰۶ کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = [1 + x] + [1 - x]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۶

- ۱ (۱) صفر (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۲۰۷ اگر $f(x) = 1 + [x] + [-x]$ ، آنگاه $f(x)$ با کدام گزینه برابر نیست؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱ (۱) $f(-x)$ (۲) $\frac{1}{f(x)}$ (۳) $\sqrt{f(x)}$ (۴) $(f(x))^2$

۲۰۸ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن گاه با توجه به تعریف جزء صحیح کدام گزاره همواره صحیح است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱ (۱) $[x + y] = [x] + [y]$ (۲) $[xy] = [x][y]$ (۳) $[x - y] = [x] - [y]$ (۴) $[x + 1] = [x] + 1$

۲۰۹ هرگاه $f(x) = [x + 2] + [-x]$ ، آن گاه $f(\log 3)$ برابر کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱ (۱) -1 (۲) 22 (۳) صفر (۴)



۲۱۰ اگر $f(x) = \frac{3^{-[x]}}{3^{[-x]}}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{10})$

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۴ $\frac{7}{3}$

۳ ۲۱

۲ ۲۴

۱ $\frac{16}{3}$

نمودار توابع شامل جزء صحیح

۲۱۱ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[x^2 + \frac{1}{2} \right]$ از پاره‌خط‌هایی تشکیل شده است که طول

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

بلندترین آنها است. ([]، نماد جزء صحیح است.)

۴ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳ $\sqrt{2}$

۲ ۲

۱ ۱

۲۱۲ نمودار $f(x) = [\sqrt{x}]$ در فاصله‌ی $1 \leq x \leq 16$ از پاره‌خط ساخته شده است که طول

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

بلندترین آنها است. ([]، نماد جزء صحیح است.)

۴ ۵،۴

۳ ۷،۴

۲ ۷،۳

۱ ۵،۳

۲۱۳ نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه‌ی $x \in (-2, 2)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ ([]، نماد

خارج از کشور - ۱۳۹۱

جزء صحیح است.)

۴ ۷

۳ ۶

۲ ۵

۱ ۴

۲۱۴ کدام یک از خط‌های زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + [x]$ را قطع نمی‌کند؟ ([]، نماد

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

جزء صحیح است.)

۴ $y = 3$

۳ $y = \frac{3}{2}$

۲ $y = 2$

۱ $y = 1$



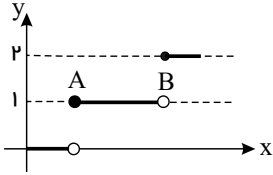
۲۱۵) تابع $y = 2x - [x]$ در بازه‌ی $x \in [0, 2]$ از n پاره‌خط یکسان با طول l تشکیل شده است؛

دوتایی (n, l) به کدام صورت است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) $(2, \sqrt{2})$ ۲) $(2, \sqrt{5})$ ۳) $(1, 3)$ ۴) $(1, \sqrt{5})$

۲۱۶) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = [\sqrt{x}]$ است. طول پاره‌خط AB کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

منبع قلم چی - ۱۳۹۵



۲) ۳

۱) ۲

۴) ۵

۳) ۴

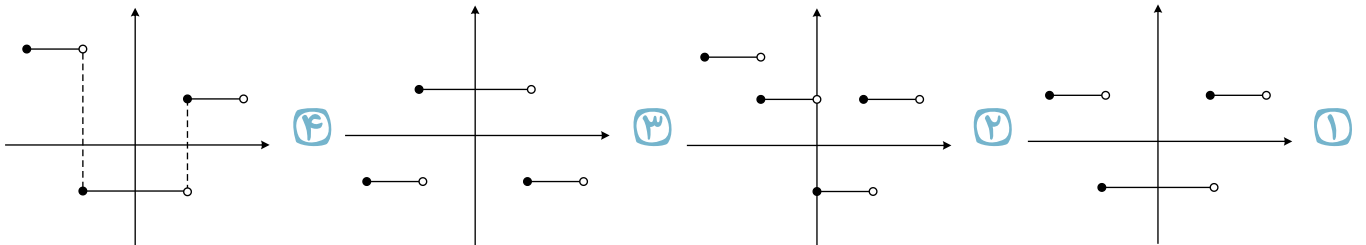
۲۱۷) برد تابع $f: (2, 3, 5) \rightarrow R$ با ضابطه‌ی $f(x) = x - [x]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) $(0, 0, 5)$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $[0, 1)$ ۴) $(0, 0, 5]$

سراسری - ۱۴۰۰

۲۱۸) نمودار تابع $y = 2| [3x] | - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ کدام است؟



معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح

۲۱۹) معادله‌ی $3[x] - |x| = 12$ چند ریشه دارد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار



۲۲۰) اگر مجموعه جواب نامعادله $|x - 2| \leq 1$ بازه $[a, b)$ باشد $a + b$ کدام است؟ ([])، علامت جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴) ۶

۳) ۵

۲) ۴

۱) ۳

۲۲۱) معادله $x + \frac{1}{2}x = 1$ دارای چند جواب می باشد؟ ([])، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴) بیشمار

۳) ۲

۲) ۱

۱) صفر

۲۲۲) اگر مجموعه جواب معادله $3 = [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{3}{2}]$ بازه $[a, b)$ باشد، $a + b$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴) ۳

۳) ۲٫۵

۲) ۲

۱) ۱٫۵

۲۲۳) مجموعه جواب معادله $[x] + [3x] = 0$ ، بازه $[a, b)$ است؛ مقدار $b - a$ کدام است؟ ([])؛ نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۴) $\frac{2}{3}$

۳) ۶

۲) $\frac{1}{3}$

۱) ۳

۲۲۴) اگر $2 = \left[\frac{2x+1}{3} \right]$ آن گاه حاصل $\left[\frac{1-x}{2} \right]$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۵

۴) فقط ۲-

۳) ۱- یا ۲-

۲) صفر یا ۱-

۱) فقط ۱-

۲۲۵) مجموعه جواب معادله $[x] - [-x] = 3$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۴) (۱, ۲)

۳) $\{\frac{3}{2}\}$

۲) [۱, ۲)

۱) [۰, ۱)



۲۲۶) اگر مجموعه جواب معادله $|x| + 1 = 1$ به صورت بازه (a, b) باشد، آن گاه $b - a$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۲۷) اگر n عددی طبیعی باشد، مجموعه جواب معادله $[2x + 1] = \left[\sqrt{4n^2 + 2n + 1} \right]$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

$\left[n - \frac{1}{2}, n \right)$ (۴)

$(2n, 2n + 1)$ (۳)

$\left[n - \frac{1}{2}, n \right]$ (۲)

$\left[n + \frac{1}{2}, n + 1 \right)$ (۱)

۲۲۸) اگر $\left[x - \frac{1}{2} \right] - \left[x - \frac{3}{2} \right] + [x] = 3$ باشد، آن گاه بزرگ ترین بازه مقادیر قابل قبول x کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

$[2, 3)$ (۴)

$(2, 3)$ (۳)

$[4, 5)$ (۲)

$(4, 5)$ (۱)

پاسخ نامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته شده را کمی ساده می کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله ای و مزدوج مورد استفاده قرار می گیرند.

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \stackrel{\text{مربع دو جمله ای}}{=} ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 \\ = (a-b)^4 (a+b)^4 = ((a-b)(a+b))^4 = (a^2 - b^2)^4$$

و اما $a^2 = \sqrt{\sqrt{6}-2}$ و $b^2 = \sqrt{\sqrt{6}+2}$ می شوند پس داریم:

$$((\sqrt{\sqrt{6}-2} - \sqrt{\sqrt{6}+2})^2)^2 = (\sqrt{6}-2 + \sqrt{6}+2 - 2\sqrt{6-2})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 \\ = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3})$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ داخل پرانتز اول مخرج مشترک می گیریم:

$$(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

می دانیم معادله درجه ۲ به صورت $x^2 - sx + p$ است. درواقع مجموع ریشه ها ۲ خواهد بود.
داریم:

$$x_1 + x_2 = s = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ ابتدا هر دو عبارت را ساده می کنیم.

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \frac{13(\sqrt{3}-1)}{13} = \sqrt{3}-1$$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1 + 2+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

ابتدا هر دو عبارت را ساده می کنیم.

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}} \times \frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2}+2\sqrt{12}+15\sqrt{3}+3\sqrt{18}}{25-6} = \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{19} \\ = \frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19} = \frac{19(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{19} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt[4]{3^2}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$



پس : $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$

روش دوم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} \times \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{27})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{27}} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

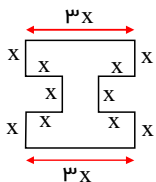
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$x^2 - 4x + m = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + m - 5 = 0$$

این معادله‌ی درجه‌ی دوم نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(m - 5) < 0 \Rightarrow 4m > 36 \Rightarrow m > 9$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

محیط شکل : $6x + 10x = 16x$ مساحت شکل : $(3x \times 3x) - 2(x \times x) = 7x^2$

$$\text{مساحت} = \text{محیط} \Rightarrow 7x^2 = 16x \Rightarrow 7x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x(7x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{7} \text{ قی} \\ x = 0 \text{ غ قی} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$ باشد بنابراین:

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$\rightarrow 2m^2 - 5m - 7 < 0 \rightarrow (m + 1)(2m - 7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3,5$$

در ضمن ضریب x^2 نباید صفر باشد یعنی $m \neq \frac{1}{2}$ است.

$$\text{جواب} = -1 < m < 3,5 - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ چون معادله دارای ریشه مضاعف است $\Delta = 0$ است و چون این ریشه مضاعف، منفی است باید $\frac{-b}{2a} < 0$ باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow m^2 - 4(m + 4)\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$$

$$\rightarrow (m - 4)(m + 2) = 0 \rightarrow m = 4, m = -2$$

$$\text{به ازای } m = 4 \text{ منفی است} \rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-m}{2m + 8} \rightarrow \text{ریشه مضاعف}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹ یکی از اضلاع مستطیل را x و ضلع دیگر را y در نظر می‌گیریم.

$$\text{محیط} = 60 \rightarrow 2(x + y) = 60 \rightarrow x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x$$

$$\text{مساحت} = 216 \rightarrow xy = 216 \rightarrow x(30 - x) = 216$$



$$\rightarrow x^2 - 30x + 216 = 0 \rightarrow (x - 18)(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 18 \rightarrow y = 12 \\ x = 12 \rightarrow y = 18 \end{cases} \rightarrow \text{اختلاف} = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$-x^2 + 8x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 8 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{8}{\sqrt{1}} = 8$$

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m - 6)(-3) > 0 \rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \rightarrow (m + 6)(m - 3) > 0$$

تعیین علامت

$$\longrightarrow m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \frac{2m}{m - 6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-3}{m - 6} > 0 \rightarrow m - 6 < 0 \rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می‌رسیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6 & \text{جمع ریشه‌ها} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 & \text{ضرب ریشه‌ها} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = A \rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} \rightarrow A^2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{6^3 - 3(4)(6)}{16} + \frac{2}{2} = \frac{144}{16} + 1 = 9 + 1 \rightarrow A^2 = 10 \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{10}$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m + 3}{m}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$\text{فرض مسأله: } x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m + 3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 & \text{غ ق} \\ m = -\frac{9}{5} \rightarrow \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه‌ها نیست} \end{cases}$$

مجموع ریشه‌های این معادله، برابر $-\frac{b}{a} = 6$ و حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله، برابر $\frac{c}{a} = 3$ است. بنابراین هر دو ریشه‌ی این معادله مثبت هستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$



۱۵) ریشهٔ معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند. ۱ ۲ ۳ ۴

صدق در معادله

$$\alpha \rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 2$$

$$\text{پس: } \alpha^2 - \alpha + \beta = 2\alpha + 2 - \alpha + \beta = \underbrace{\alpha + \beta}_{-\frac{b}{a}} + 2 = 2 + 2 = 4$$

۱۶) با کمی دقت متوجه می‌شویم که یک ریشهٔ معادله $x_1 = -2$ است زیرا اگر $x_1 = -2$ را در معادله صدق دهیم به رابطهٔ داده شده در سؤال می‌رسیم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_1 = -2 \xrightarrow{\text{معادله}} 12 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -12$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow -2x_2 = \frac{b}{3} \rightarrow x_2 = -\frac{b}{6}$$

۱۷) اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را α و β بنامیم در این صورت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ است. $(\alpha, \beta > 0)$ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \end{cases} \rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} S + 2\sqrt{P} = 4$$

$$\rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 \rightarrow m+2 = 8 \rightarrow m = 6$$

۱۸) شرط آنکه در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی معادله، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد آن است که داشته باشیم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{64m^2}{4m+8} = \frac{16}{3} \rightarrow \frac{4m^2}{4m+8} = \frac{1}{3} \rightarrow 12m^2 = 4m+8 \rightarrow 12m^2 - 4m - 8 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{c}{a} = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند چون به ازای آنها $\Delta > 0$ است.

۱۹) برای این منظور باید $\Delta > 0$ و جمع و ضرب ریشه‌ها نیز مثبت باشند. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 16 - 4m(m-2) > 0 \rightarrow 4 - m(m-2) > 0$$

$$\rightarrow m^2 - 2m - 4 < 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 16 = 20 \rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} \\ m = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow 1 - \sqrt{5} < m < 1 + \sqrt{5}$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{4}{m} > 0 \rightarrow m < 0$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m-2}{m} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline & + & & - & & + & & \end{array} \rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 2$$

اشتراک سه شرط داده شده برابر $(1 - \sqrt{5}, 0)$ است که فقط عدد صحیح -1 در آن قرار دارد.



اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، در این صورت:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -2, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -5$$

سوال، حاصلضرب $(\alpha + 2)(\beta + 2)$ را خواسته است بنابراین:

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = \alpha\beta - 4 + 4 = \alpha\beta$$

پس به حاصلضرب مقداری اضافه نمی‌شود.

۲۱ ابتدا معادله‌ی داده شده را مرتب می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^3 + mx^2 + m + 2x - m = 0 \rightarrow x^3 + mx^2 + 2x = 0$$

$$\rightarrow x(x^2 + mx + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + mx + 2 = 0 \end{cases}$$

چون یک ریشه‌ی معادله برابر صفر است، بنابراین مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + mx + 2 = 0$ برابر ۱۲ است پس اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + mx + 2 = 0$ باشد، داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -m, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = 2$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = 12 \rightarrow x'^2 + x''^2 = 12 \rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 12$$

$$\rightarrow m^2 - 4 = 12 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم را منفی نمی‌کنند.

۲۲ ریشه‌ی معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\alpha \rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 2$$

$$\text{پس: } \alpha^2 - 5\alpha - \beta = 4\alpha + 2 - 5\alpha - \beta = -\alpha - \beta + 2 = -(\alpha + \beta) + 2$$

$$= -\left(-\frac{b}{a}\right) + 2 = -(4) + 2 = -2$$

۲۳ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ باشد. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \rightarrow (a-2)^2 - (14-a) > 0$$

$$\rightarrow a^2 + 4 - 4a - 14 + a > 0 \rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 5 : I$$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow 14 - a > 0 \rightarrow a < 14 : II$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2(a-2) > 0 \rightarrow a-2 > 0 \rightarrow a > 2 : III$$

از اشتراک I و II و III به جواب $5 < a < 14$ می‌رسیم.

۲۴ یک جواب معادله، $x = 1$ می‌باشد و چون گفته شده است معادله دارای دو جواب مثبت و یک جواب منفی است یعنی معادله‌ی $x^2 + ax - a + 1 = 0$ باید دارای یک جواب مثبت و یک جواب منفی باشد. شرط آنکه معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف علامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < 0$ باشد. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow -a + 1 < 0 \rightarrow a > 1$$

می‌دانیم $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$ و $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5$ است.

$$A = \left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{2+2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2+2}{\alpha}\right)^2 = \frac{16}{\beta^2} + \frac{16}{\alpha^2} = \frac{16(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16(25 - 4)}{4} = 84$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 12, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 12m^2$$



فرض: $\alpha = \beta^2 \xrightarrow{\alpha+\beta=12} \beta^2 + \beta = 12 \Rightarrow \beta^2 + \beta - 12 = 0 \Rightarrow (\beta + 4)(\beta - 3) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = -4 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 16 + 4\alpha + 8m^3 = 0 \rightarrow 8m^3 = -64 \rightarrow m^3 = -8 \rightarrow m = -2 \\ \beta = 3 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 9 - 36 + 8m^3 = 0 \rightarrow 8m^3 = 27 \rightarrow m^3 = \frac{27}{8} \rightarrow m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو m بدست آمده، باعث منفی شدن Δ نمی شوند و هر دوی آنها قابل قبول هستند بنابراین:

$$-2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

ریشه های معادله را $(2\alpha - 1)^2$ و $(2\alpha + 1)^2$ در نظر می گیریم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۷)

جمع ریشه ها $-\frac{b}{a} = 29 = (2\alpha - 1)^2 + (2\alpha + 1)^2 \rightarrow 4\alpha^2 + 1 - 4\alpha + 4\alpha^2 + 1 + 4\alpha = 29 \rightarrow 8\alpha^2 = 28 \rightarrow \alpha^2 = \frac{7}{2}$
 $\rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}, 11^2$ ریشه ها: $13^2, 11^2$

ضرب ریشه ها $\frac{c}{a} \rightarrow 13^2 \times 11^2 = m^2 \rightarrow m = 13 \times 11 = 143 \rightarrow \sqrt{m+1} = \sqrt{144} = 12$

معادله را به صورت $m^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ مرتب می کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۸)

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

معادله $m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$ غیر قابل قبول

معادله $m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$ قابل قبول

معادله ی داده شده را به صورت $x^2 + 4x - m + 1 = 0$ می نویسیم. اگر α و β ریشه های این معادله ی درجه ی دوم باشند داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۹)

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -13 \rightarrow \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = -13 \rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -13 \rightarrow -\frac{b}{c} = -13$$

$$\rightarrow \frac{b}{c} = 13 \rightarrow \frac{4}{-m+1} = 13 \rightarrow -13m + 13 = 4 \rightarrow -13m = -9 \rightarrow m = \frac{9}{13}$$

چون m ریشه معادله است پس در معادله صدق می کند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۰)

صدق در معادله $m \rightarrow m^2 - 7m + 2 = 0 \rightarrow m^2 = 7m - 2$

پس: $m^2 + 7n - 2 = 7m - 2 + 7n - 2 = 7(m + n) - 4 = 7(\frac{-b}{a}) - 4 = 7(7) - 4 = 45$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۱)

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2}$$

دو طرف معادله را در $(x+2)(x-2)$ ضرب می کنیم و داریم:

$$\rightarrow x(x+2) - (x+1) = x(x-2) \rightarrow x^2 + 2x - x - 1 = x^2 - 2x \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

معادله: $2x^2 - 15(\frac{1}{3})x - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow$ مجموع جواب ها: $S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$

یکی از ریشه ها برابر $x = -3$ است پس برای آنکه معادله دارای دو ریشه منفی و یک ریشه مثبت باشد باید معادله (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۲)



$mx^2 + 8x + m - 3 = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت داشته باشد یعنی $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{m-3}{m} < 0 \rightarrow \frac{m}{\text{عبارت}} \begin{array}{c|ccc} -\infty & 0 & 3 & +\infty \\ \hline & + & - & + \end{array} \rightarrow 0 < m < 3$$

با توجه به $16a - 4b + c = 0$ متوجه می‌شویم که $x_1 = -4$ یکی از ریشه‌های معادله است که در خود معادله قرار داده شده است. (۳۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -4 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{4a}$$

در این سؤال $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -6$ و $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3$ است یعنی α و β غیر هم علامت هستند و ریشه مثبت از نظر قدرمطلق، بزرگتر است فرض می‌کنیم $\alpha > 0$ و $\beta < 0$ است پس داریم: (۳۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$|\alpha| + |\beta| = \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{9 + 24}}{|1|} = \sqrt{33}$$

(۳۵) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x = 1$ است و معادله بر $x - 1$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \\ - x^3 + x^2 \\ \hline ax^2 + (4-a)x - 4 \\ - ax^2 + ax \\ \hline 4x - 4 \\ - 4x + 4 \\ \hline \text{صفر} \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x = 1$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در

پراتر دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16 \rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow 4 > 0 \text{ همواره برقرار است} \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

توجه نمایید که به ازای $a = -5$ معادله دارای دو ریشه خواهد بود.

(۳۶) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(x-2)(x^2 + mx + m + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + mx + m + 3 = 0 \end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x = 2$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + mx + m + 3 = 0$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2^2 = 13$$

مجموع مجنورات ریشه‌ها

$$\alpha^2 + \beta^2 + 4 = 13 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 9 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{c}{a} = m+3]{\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -m}$$

$$m^2 - 2(m+3) = 9 \rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \rightarrow (m-5)(m+3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 5 \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^2 + 5x + 8 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 32 < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ m = -3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow x = 0, x = 3 \end{cases}$$

بنابراین فقط $m = -3$ قابل قبول است.



$$(x+1)(mx^2-x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ mx^2-x-2=0 \end{cases}$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $mx^2-x-2=0$ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}=\frac{1}{m}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{c}{a}=-\frac{2}{m}$ است.

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی داده شده} = (-1)\left(\frac{c}{a}\right) = (-1)\left(\frac{-2}{m}\right) = \frac{2}{m}$$

$$\text{مجموع ریشه‌های معادله‌ی داده شده} = -1 + \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 + \frac{1}{m}$$

$$\text{طبق فرض: } \frac{2}{m} = -1 + \frac{1}{m} + \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \rightarrow m=3$$

توجه کنید به ازای $m=3$ معادله‌ی $mx^2-x-2=0$ به صورت $3x^2-x-2=0$ درمی‌آید که ریشه‌هایش ۱ و $-\frac{2}{3}$ هستند و هیچ کدام از ریشه‌ها

برابر ۱- نیست پس به ازای این مقدار m معادله‌ی داده شده دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

$$S=P+2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow c-b=2a$$

دقت کنید صورت سؤال $ax^2+bx-c=0$ داده شده است و با فرض مثبت بودن c معادله‌ی همواره جواب دارد ($\Delta > 0$) در ضمن $P = \frac{-c}{a}$ می‌شود.

$$ifa=1 \Rightarrow c \text{ باید ۲ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c=3, 4, \dots, 9 \\ b=1, 2, \dots, 7 \end{cases} \text{ حالت ۷}$$

$$ifa=2 \Rightarrow c \text{ باید ۴ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c=5, 6, 7, 8, 9 \\ b=1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \text{ حالت ۵}$$

$$ifa=3 \Rightarrow c \text{ باید ۶ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c=7, 8, 9 \\ b=1, 2, 3 \end{cases} \text{ حالت ۳}$$

$$ifa=4 \Rightarrow c \text{ باید ۸ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c=9 \\ b=1 \end{cases} \text{ حالت ۱}$$

در مجموع ۱۶ حالت خواهیم داشت.

$$P=-5 \text{ و } S=-1 \text{ داریم } x^2+x-5=0 \text{ در معادله‌ی اولیه} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 39$$

از طرفی در تمام گزینه‌ها حاصل ضرب ریشه‌ها $P' = \frac{-1}{125}$ است پس کافی است حاصل جمع ریشه‌های معادله‌ی جدید را بررسی کنیم.

$$S' = \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} = \frac{(x_2+1)^3 + (x_1+1)^3}{(x_1+1)^3(x_2+1)^3} \Rightarrow S' = \frac{x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 + 2}{(x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1)^3}$$

نکته: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله‌ی درجه ۲ باشند داریم:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS \end{cases}$$

و در نهایت:

$$S' = \frac{S^3 - 3PS + 3(S^2 - 2P) + 3S + 2}{(P+S+1)^3} = \frac{(-1)^3 - 3(-5)(-1) + 3((-1)^2 - 2(-5)) + 3(-1) + 2}{(-5-1+1)^3} \Rightarrow S' = \frac{16}{-125}$$

$$\Rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده باشند طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow a^2 + bc = 0 \rightarrow 9 + (2m-1)(2-m) = 0$$

$$\rightarrow 9 + 4m - 2m^2 - 2 + m = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} m = -1, m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 36 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد}$$



$$m = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 18 > 0 \text{ قابل قبول}$$

برای این منظور باید $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۱)

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 12(m + 6) > 0 \rightarrow m^2 - 12m - 72 > 0 \rightarrow (m - 12)(m + 6) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -6 \text{ یا } m > 12 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $-6 < m < -4$ می‌رسیم.

منظور سؤال این است که معادله درجه دوم جدیدی بنویسید که ریشه‌هایش یک واحد از ریشه‌های معادله درجه دوم (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۲)

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \text{ کم‌تر باشند برای این منظور } x \text{ را به } x+1 \text{ تبدیل می‌کنیم:}$$

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} (x+1)^2 - 3(x+1) - 5 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 1 + 2x - 3x - 3 - 5 = 0 \rightarrow x^2 - x - 7 = 0$$

توجه کنید ریشه‌های معادله $a(x+k)^2 + b(x+k) + c = 0$ واحد k از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ کم‌تر هستند.

$$x^2 + kx + 1 = 0 \text{ با توجه به معادله ی } (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۳)$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -k \text{ حاصل جمع ریشه‌ها و } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \text{ حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

چون ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $\{\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}\}$ است.

$$S' = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \frac{-b}{a} = 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 16 \text{ بنابراین:}$$

$$\rightarrow -k + 2\sqrt{1} = 16 \Rightarrow -k = 14 \Rightarrow k = -14$$

می‌دانیم برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۴)

کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد کمتر}} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$$

$$\rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \rightarrow -x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\text{از معادله ی اول متوجه می‌شویم که } S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3 \text{ و } P_{\text{قدیم}} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \text{ است.} \quad (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۵)$$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \underbrace{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}_{1} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{1}} = \sqrt{5}$$

$$P_{\text{جدید}} = (\alpha\sqrt{\beta})(\beta\sqrt{\alpha}) = \alpha\beta, \sqrt{\alpha\beta} = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{معادله ی جدید به صورت } x^2 - Sx + P = 0 \text{ یا } x^2 - 5x + 1 = 0 \text{ است.}$$

توجه کنید اگر α, β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند آن‌گاه $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ است.

$$x^2 - 5x - 5 = 0 \text{ اگر ریشه‌های معادله ی } x^2 - 3x + k = 0 \text{ را } \alpha \text{ و } \beta \text{ در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله ی } (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۶)$$

برابر $\alpha^2 - 1$ و $\beta^2 - 1$ می‌باشند.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3, \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = k$$

$$\underbrace{\alpha^2 - 1 + \beta^2 - 1}_{\text{جمع ریشه‌های معادله ی}} = -\frac{b}{a} \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2 = 5 \rightarrow 9 - 2k - 2 = 5 \rightarrow 2k = 2 \rightarrow k = 1$$

جمع ریشه‌های معادله ی

$$x^2 - 5x - 5 = 0$$

$$\text{دقت کنید که } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ است.}$$

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را α و β بنامیم باید معادله درجه دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌هایش α^2 و β^2 باشند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۷)



$$S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5, \quad P_{\text{قدیم}} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 2(-2) = 29$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = (-2)^2 = 4$$

می‌دانیم که اگر مجموع (S) و حاصل ضرب دو ریشه (P) را داشته باشیم معادله‌ی درجه‌ی دوم مطلوب به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است پس معادله‌ی مطلوب به صورت $x^2 - 29x + 4 = 0$ است.

ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bmx + ck^2 = 0$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند،

و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$ واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند.

روش اول:

$$2x^2 + bx + 2 = 0 \xrightarrow{\text{دو برابر}} 2x^2 + 2bx + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + bx + 4 = 0$$

b در ۲ و c در ۲

$$\xrightarrow{\text{یک واحد بیشتر}} (x-1)^2 + b(x-1) + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + bx - b + 4 = 0$$

$x \rightarrow x-1$

$$\Rightarrow x^2 + (b-2)x - b + 5 = 0 \quad \text{مقایسه با } x^2 - 7x + c = 0$$

$$\text{پس: } b-2 = -7 \Rightarrow b = -5, \quad -b+5 = c \Rightarrow c = 10 \Rightarrow b-c = -15$$

روش دوم:

اگر y ، ریشه‌ی جدید و x ریشه‌ی قدیم باشد داریم:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}} 2\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{y-1}{2}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{y^2 - 2y + 1}{2} + \frac{by - b}{2} + 2 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 + by - b + 4 = 0 \Rightarrow y^2 + (b-2)y - b + 5 = 0$$

ادامه‌ی حل مسئله مشابه روش اول است.

اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $8x^2 - mx - 8 = 0$

برابر α^3 و β^3 هستند.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\text{داریم: } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$\alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha \cdot \beta)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 13x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } 8x^2 - mx - 8 = 0} m = 13$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند پس $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$ است.

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{3} \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = \frac{a^2}{9}$$

$$\rightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}) = \frac{a^2}{9} \rightarrow 1(3 + 2\sqrt{1}) = \frac{a^2}{9} \rightarrow a^2 = 45 \rightarrow a = \pm 3\sqrt{5}$$

چون α و β مثبت هستند پس $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ که برابر $-\frac{a}{3}$ است باید مثبت باشد یعنی a باید منفی باشد پس $a = -3\sqrt{5}$ است.

می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ در ابتدا کافی است مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله را به دست آوریم.

$$S = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$$



$$P = \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ = (\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 30^\circ\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\text{معادله مطلوب: } x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{16} = 0 \rightarrow 16x^2 - 16x + 1 = 0$$

معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های این معادله باشند. اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$y = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2y \xrightarrow{\text{معادله}} (2y)^2 + 4(2y) - 1 = 0 \rightarrow 4y^2 + 8y - 1 = 0 \rightarrow 4x^2 + 8x - 1 = 0$$

که اگر این معادله را با $4x^2 + 8x + m - 1 = 0$ مقایسه کنیم داریم:

$$m - 1 = -1 \rightarrow m = 0$$

ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده را به صورت $x^2 + x - 3 = 0$ مرتب می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۳)

حال معادله درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش قرینه ریشه‌های این معادله باشد (کافی است علامت b را قرینه کنیم) یعنی

$$x^2 - x - 3 = 0. \text{ سپس معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های این معادله باشد (کافی است } x \text{ را به } x+1 \text{ تبدیل کنیم).}$$

$$(x+1)^2 - (x+1) - 3 = 0 \rightarrow x^2 + 1 + 2x - x - 1 - 3 = 0 \rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 - bx + c = 0$ ، قرینه‌ی ریشه‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و ریشه‌های معادله‌ی

$$a(x+k)^2 + b(x+k) + c = 0 \text{ واحد بیشتر از ریشه‌های } ax^2 + bx + c = 0 \text{ هستند.}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵۴)

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{قرینه}} x^2 + 4x + 1 = 0$$

علامت b عوض

۳ برابر

$$\rightarrow x^2 + 12x + 9 = 0$$

b در ۳ و c در ۳ ضرب می‌شود.

۲ واحد بیشتر

$$\rightarrow (x-2)^2 + 12(x-2) + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + 12x - 24 + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow x-2} \rightarrow x^2 + 8x - 11 = 0$$

ریشه‌های معادله $ax^2 - bx + c = 0$ ، قرینه ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

ریشه‌های معادله $ax^2 + b_kx + c_k = 0$ ، k برابر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

ریشه‌های معادله $a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$ ، k واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵۵)

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 9 = 0$ را به دست آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{3 \pm 9}{4} = 3, -\frac{3}{2}$$

$$x'_1 = \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{17}{9} \quad \text{و} \quad x'_2 = \frac{1}{x_2} - 2 = \frac{1}{-\frac{3}{2}} - 2 = -\frac{4}{3} - 2 = -\frac{14}{3}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{17}{9} - \frac{14}{3}\right)x + \underbrace{\left(-\frac{17}{9}\right)\left(-\frac{14}{3}\right)}_P = 0 \rightarrow x^2 + \frac{31}{9}x + P = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} \rightarrow 9x^2 + 31x + 9P = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2 + ax + b = 0} a = 31$$

برای تشکیل معادله جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم؛ بنابراین: (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۶)

$$S' = \frac{\alpha}{2S+P} + \frac{\beta}{3S+4P} \xrightarrow{S=-\frac{b}{a}=3, P=\frac{c}{a}=-1} \frac{\alpha}{2(3)-1} + \frac{\beta}{3(3)+4(-1)} = \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha+\beta}{5} = \frac{S}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P' = \frac{\alpha}{2S+P} \times \frac{\beta}{3S+4P} = \frac{\alpha}{5} \times \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha\beta}{25} = \frac{P}{25} = \frac{-1}{25}$$



حال با داشتن (S') و (P') معادله جدید را می نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{25} = 0 \xrightarrow{\times 25} 25x^2 - 15x - 1 = 0$$

با مقایسه معادله حاصل با معادله $25x^2 - 5kx - 1 = 0$ داریم:

$$-5k = -15 \rightarrow k = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$(x^2 + 3x)^2 - 8 = 7(x^2 + 3x) \xrightarrow{x^2 + 3x = A} A^2 - 8 = 7A \rightarrow A^2 - 7A - 8 = 0$$

$$\rightarrow (A - 8)(A + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 8 \rightarrow x^2 + 3x = 8 \rightarrow x^2 + 3x - 8 = 0 \rightarrow S = -\frac{b}{a} = -3, P = \frac{c}{a} = -8 \\ A = -1 \rightarrow x^2 + 3x = -1 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow S' = -\frac{b}{a} = -3, P' = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$S + S' = -6, PP' = -8 \rightarrow 2 = \text{تفاضل}$$

کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه‌ی اول $(y = x)$ تلاقی دهیم و معادله‌ی تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\rightarrow (m - 12)(m + 4) = 0 \rightarrow m = 12, -4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m ، طول نقطه‌ی تماس مثبت است (در ناحیه‌ی اول x مثبت است).

$$m = 12 \rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 = 0 \rightarrow x = -3$$
 غ ق

$$m = -4 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$
 ق ق

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$x^2 + x + 1 = t \rightarrow t(t + 1) - 2 = 0 \rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t + 5)(t - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -5 \rightarrow x^2 + x + 1 = -5 \rightarrow x^2 + x + 6 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 24 < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.} \\ t = 4 \rightarrow x^2 + x + 1 = 4 \rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 + 12 > 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی متمایز دارد.} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$(x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x + 1 - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 3x + 1 = A} A^2 + A - 2 = 0 \rightarrow (A + 2)(A - 1) = 0$$

$$A = -2 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = -2 \rightarrow x^2 + 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 < 0$$
 ریشه‌ی حقیقی ندارد:

$$A = 1 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = 1 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = -3 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -3$$

در معادله صورت سؤال، اگر $x - \sqrt{x} = t$ باشد، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$t^2 + 2t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ t = -2 \Rightarrow x - \sqrt{x} = -2 \end{cases}$$

برای حل $x - \sqrt{x} = -2$ باید $\sqrt{x} = k$ فرض کنیم:

$$k^2 - k + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.}$$

بنابراین معادله فقط دو جواب $x = 0$ و $x = 1$ را دارد.



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

اگر $x^2 = t$ باشد، آن گاه داریم:

$$\frac{1}{4}t^2 + mt + m^2 - 1 = 0$$

معادله فوق باید یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد تا معادله صورت سوال دو جواب داشته باشد که کافی است ضرب ریشه‌ها منفی باشد:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 1}{\frac{1}{4}} < 0 \rightarrow m^2 - 1 < 0 \rightarrow m^2 < 1 \rightarrow m \in (-1, 1)$$

البته اگر $\Delta = 0$ و یک ریشه حاصل مثبت باشد هم این اتفاق می‌افتد:

$$\Delta = m^2 - 4 \times \frac{1}{4}(m^2 - 1) = 1$$

اما از آن جا که Δ همواره مثبت است، پس حالت $\Delta = 0$ هیچ گاه رخ نمی‌دهد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳ ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(3x^2 + 2x + 1)^2 = 21x^2 + 14x + 15$$

حال با در نظر گرفتن $t = 3x^2 + 2x + 1$ ، معادله را به معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$(3x^2 + 2x + 1)^2 = \underbrace{21x^2 + 14x + 7 + 8}_{7(3x^2 + 2x + 1)}$$

حالا با تغییر متغیر داریم:

$$t^2 = 7t + 8 \Rightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Rightarrow t = 8, -1$$

پس:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 = 8 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 7 = 0 & (1) \\ 3x^2 + 2x + 1 = -1 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

معادله (۱) دارای دو ریشه حقیقی ($\Delta > 0$) با حاصل ضرب $P = \frac{c}{a} = \frac{-7}{3}$ است. اما معادله (۲) ریشه حقیقی ندارد ($\Delta < 0$). پس معادله دارای دو ریشهحقیقی با حاصل ضرب $-\frac{7}{3}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$(x-1)^4 + 2x = x^4 + 7 \rightarrow (x-1)^4 = x^4 - 2x + 1 + 6 \rightarrow (x-1)^4 = (x-1)^2 + 6$$

$$(x-1)^2 = A \rightarrow A^2 = A + 6 \rightarrow A^2 - A - 6 = 0 \rightarrow (A-3)(A+2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=3 \rightarrow (x-1)^2 = 3 \rightarrow x-1 = \pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases} \\ A=-2 \rightarrow (x-1)^2 = -2 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = (\sqrt{3}+1)^2 + (-\sqrt{3}+1)^2 = 3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3} = 8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵ منظور از صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = x^2 - 6x + 2$ ، ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 6x + 2 = 0$ است. از آنجا که دراین معادله $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ ، می‌توانیم بگوییم ریشه‌ها یعنی α و β مثبت هستند.حال به معادله $\alpha x^4 + 13x^2 - \beta = 1$ می‌رسیم که با تغییر متغیر $x^2 = t$ به صورت $\alpha t^2 + 13t - \beta - 1 = 0$ در می‌آید. در این معادله:

$$ac = \alpha(-\beta - 1) = -\alpha(\beta + 1) \xrightarrow{\alpha, \beta > 0} \text{همواره منفی}$$

پس با توجه به $ac < 0$ می‌توان نتیجه گرفت این معادله دارای دو ریشه مختلف علامت (مثلاً $t_1 < 0$ و $t_2 > 0$) است.پس $x^2 = t_1$ جواب ندارد و $x^2 = t_2$ دارای دو جواب قرینه $x = \pm\sqrt{t_2}$ است که حاصل جمع آن‌ها حتماً صفر خواهد شد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده می‌کنیم و معادله به صورت مقابل در می‌آید:

$$t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$$



به ازای هر جواب $t > 0$ دو ریشه $x = \pm\sqrt{t}$ به دست می آید و به ازای هر جواب $t = 0$ یک ریشه $x = 0$ به دست می آید و به ازای $t < 0$ نیز هیچ ریشه حقیقی برای x به دست نمی آید. بنابراین شرط اینکه معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد این است که معادله $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ یا دارای یک ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی باشد (حالت ۱) و یا اینکه دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد (حالت ۲):

$$\text{حالت ۱: } \frac{c}{a} < 0 \rightarrow 2m - 1 < 0 \rightarrow m < \frac{1}{2}$$

حالت ۲:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 4m^2 - 4(2m - 1) = 0 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \\ (m - 1)^2 = 0 \rightarrow m = 1 \\ \frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow \frac{2m}{2} > 0 \rightarrow m > 0 \end{cases}$$

پس جواب حالت دوم $m = 1$ است بنابراین جواب کلی معادله به صورت $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$ است.

$$\text{مختصات رأس سهمی به معادله‌ی } y = ax^2 + bx + c \text{ از رابطه‌ی } S \begin{cases} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases} \text{ استفاده می‌کنیم.}$$

$$x^2 + 2ax + y + b = 0 \rightarrow y = -x^2 - 2ax - b$$

$$S \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow \frac{2a}{-2} = 1 \rightarrow a = -1 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = -2 \rightarrow \frac{4b - 4a^2}{-4} = -2 \rightarrow \frac{4b - 4}{-4} = -2 \rightarrow 4b - 4 = 8 \rightarrow b = 3 \end{cases}$$

پس $a + b = 2$ است.

$$\text{طبق رابطه‌ی } x = \frac{-b}{2a}, \text{ محور تقارن سهمی به صورت } x = \frac{-\frac{c}{2}}{2(1)} = -\frac{c}{4} \text{ است. در نتیجه:}$$

$$-\frac{c}{4} = \frac{3}{1} \rightarrow c = -12$$

$$y = x^2 - 6x + 8 \text{ خواهد بود و تقاطع آن با محور } x \text{ ها از حل معادله‌ی } y = 0 \text{ به دست می آید:}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \rightarrow x = 2, 4$$

هر دو جواب قابل قبول اند، ولی فقط عدد ۲ در گزینه‌ها موجود است.

$$\text{نقاط } A \text{ و } C \text{ همان ریشه‌های معادله‌ی } -x^2 + 3x + 10 = 0 \text{ می‌باشند.}$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow -(x - 5)(x + 2) = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} x_1 = -2, x_2 = 5$$

از طرفی عرض نقطه B به ازای $x = 0$ در تابع f به دست می آید.

$$f(x) = -x^2 + 3x + 10 \xrightarrow{x=0} f(0) = 10$$

در نتیجه:

$$A + B + C = -2 + 10 + 5 = 13$$

$$\text{چون خط افقی } y = 2 \text{ در پایین‌ترین نقطه‌ی تابع درجه‌ی دوم بر آن مماس شده است بنابراین عرض رأس سهمی، برابر ۲ است.}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 2 \rightarrow \frac{4a(a + 2) - 9}{4a} = 2 \rightarrow \frac{4a^2 + 8a - 9}{4a} = 2 \rightarrow 4a^2 + 8a - 9 = 8a$$

$$\rightarrow 4a^2 = 9 \rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

توجه کنید چون تابع دارای Min است ضریب x^2 یعنی a باید مثبت باشد.

$$\text{برای این که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد، باید:}$$



$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 2^2 - 4(a)(a) < 0 \Rightarrow 4a^2 > 4 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 1 (*) \\ x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow a > 0 (**) \end{cases}$$

از اشتراک: (*), (**) داریم: $a \in (1, +\infty)$

می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم ($a < 0$) برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

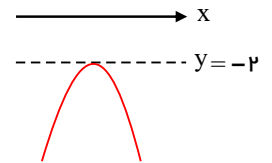
$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = 9 \Rightarrow \frac{20a - 16}{4a} = 9 \Rightarrow 36a = 20a - 16 \Rightarrow 16a = -16 \Rightarrow a = -1$$

پس خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2(-1)} = 2$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

با توجه به شکل زیر بالاترین نقطه‌ی سهمی یا همان عرض ماکسیمم تابع برابر -2 است. در نتیجه:

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = -2 \Rightarrow \frac{4(k)(k-1) - 8}{4k} = -2 \Rightarrow 4k^2 - 4k - 8 = -8k \Rightarrow 4k^2 + 4k - 8 = 0$$

$$\rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow (k+2)(k-1) = 0 \Rightarrow k = 1, k = -2$$



اما چون تابع ماکسیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد، یعنی: $k < 0$. پس تنها $k = -2$ قابل قبول است.

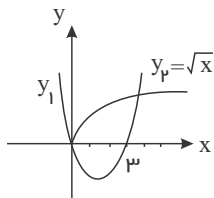
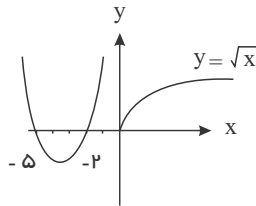
طول نقاط سهمی با محور x همان ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (2-m)x + m = 0$ هستند.

$$\text{مجموع طول نقاط تلاقی} = -\frac{b}{a} = -\frac{2-m}{2} = \frac{m-2}{2} = m \rightarrow 2m = m-2 \rightarrow m = -2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

با رسم دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = (x+2)(x+5)$ معلوم است که این دو تابع نقطه برخوردی ندارند.



حال اگر ۵ واحد منحنی درجه دوم را به راست منتقل کنیم تلاقی این دو منحنی یک نقطه به طول مثبت و نقطه دیگر مبدأ خواهد بود پس باید بیش از ۵ واحد به سمت راست منتقل شود.

چون تابع درجه‌ی ۲ محور x ها را در $x = 5$ و $x = -1$ قطع می‌کند، پس ضابطه آن به صورت $f(x) = a(x+1)(x-5)$ نوشته می‌شود. ضمناً طول رأس سهمی وسط دو ریشه است، پس داریم:

$$x_s = \frac{5 + (-1)}{2} \rightarrow x_s = 2, \quad S \Big|_{18}^2 \xrightarrow{\text{صدق}} 18 = a(3)(-3) \rightarrow a = -2$$

$$f(x) = a(x+1)(x-5) \stackrel{a=-2}{=} -2(x+1)(x-5) = -2(x^2 - 4x - 5)$$

$$\rightarrow f(x) = -2x^2 + 8x + 10 \rightarrow a = -2, b = 8, c = 10$$

$$\text{پس: } A = -3a + \frac{b}{2} - c = -3(-2) + \frac{8}{2} - 10 = 0$$

طول رأس سهمی برابر $x_s = -2$ است و چون تابع درجه دوم از مبدأ مختصات گذشته، پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور x ها

$$x_1 = 0 \text{ است، بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور } x \text{ها } x_p = -4 \text{ است } (x_s = \frac{x_1 + x_p}{2})$$

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_p) \xrightarrow{x_1=0, x_p=-4} f(x) = a(x-0)(x+4) \rightarrow f(x) = 5x(x+4)$$



چون نقطه -2 روی سهمی قرار دارد، پس مختصاتش در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$\left| \begin{array}{l} -2 \\ 4 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 4 = -2a(-2 + 4) \rightarrow 4 = -4a \rightarrow a = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸

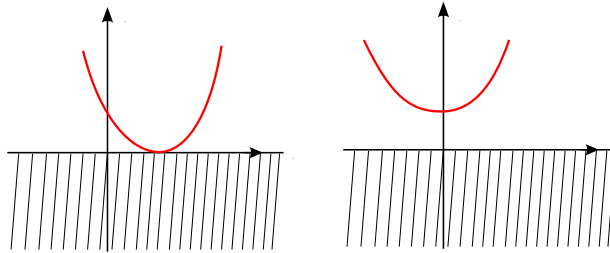
$$x'x'' = 2(x' + x'') \rightarrow \frac{c}{a} = 2\left(-\frac{b}{a}\right) \rightarrow c = -2b \rightarrow k + 4 = -2k - 2$$

$$\rightarrow 3k = -6 \rightarrow k = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 - 4x + 1$$

چون ضریب درجه‌ی دوم، منفی است تابع دارای Max است و Max تابع همان عرض نقطه‌ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(1) - 16}{4(-2)} = \frac{-24}{-8} = 3$$

سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹



برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور x ها مماس شود و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta \leq 0$ باشد.

$$Min \Rightarrow \text{ضریب } x^2 > 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \rightarrow a > 1 \quad (I)$$

$$\Delta \leq 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4(a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 12 - 4a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \text{ یا } a \geq 2 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $a \geq 2$ می‌رسیم.

رأس سهمی که کمترین عرض را دارد باید در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات واقع باشد و می‌دانیم نقطه‌ای که در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات است دارای طول و عرض مثبت است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰

$$x_S > 0 \rightarrow \frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow \frac{m+1}{2} > 0 \rightarrow m+1 > 0 \rightarrow m > -1 \quad (I)$$

$$y_S > 0 \rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} > 0 \rightarrow \frac{4 - (m+1)^2}{4} > 0 \rightarrow 4 - (m+1)^2 > 0 \rightarrow (m+1)^2 < 4$$

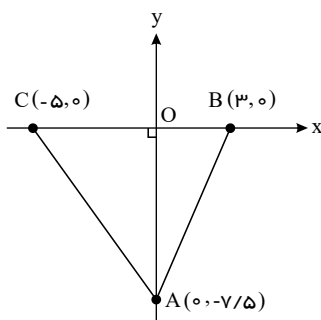
$$\rightarrow -2 < m+1 < 2 \rightarrow -3 < m < 1 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $-1 < m < 1$ می‌رسیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱

$$f(x) = 0.5x^2 + x - 7.5 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -7.5 \\ y = 0 \rightarrow 0.5x^2 + x - 7.5 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-3)(x+5) = 0 \rightarrow x = 3, x = -5 \end{cases}$$

مطابق شکل، مساحت مثلث برابر است با:



$$\rightarrow S = \frac{BC \times AO}{2} = \frac{8 \times 7.5}{2} \rightarrow S = 30$$

چون تابع درجه‌ی دوم بر محور x ها مماس است پس $\Delta = 0$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow b^2 - 48 = 0 \rightarrow b^2 = 48 \rightarrow b = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$



۸۳) باتوجه به اینکه $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، داریم:

$$f(0) = -2 \rightarrow c = -2$$

$$f(2) = 2 \rightarrow 4a + 2b + c = 2 \rightarrow 4a + 2b = 4$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} \rightarrow 2 = -\frac{b}{2a} \rightarrow 4a = -b \xrightarrow{4a+2b=4} -b+2b=4 \rightarrow b=4, a=-1$$

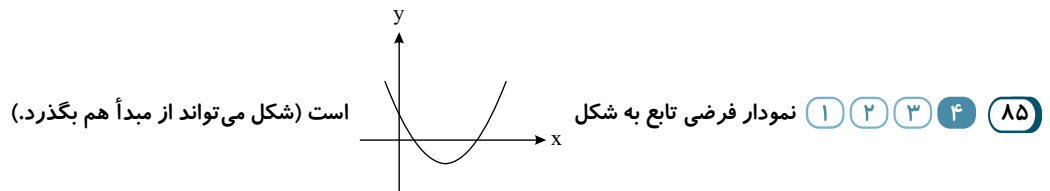
پس $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ است و درضمن α و β ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند و می‌دانیم $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 2$ است.

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 = \alpha\beta(\beta^2) + 2\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\alpha^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) = 2((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 2(16 - 4) = 24$$

۸۴) دو نقطه $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 6 \\ -2 \end{vmatrix}$ عرض یکسانی دارند و معادله محور تقارن سهمی، میانگین طول این دو نقطه می‌شود پس $x_S = 3$ است. یعنی

طبق قاعده اندیس‌ها در دنباله حسابی هرگاه $m + n = p + q$ باشد، آن‌گاه $a_m + a_n = a_p + a_q$ است.

$$\frac{a_4 + a_8}{2} = 3 \rightarrow a_4 + a_8 = 6 \xrightarrow{4+8=2+10} a_2 + a_{10} = 6$$



$$Min \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow m - 1 > 0 \rightarrow m > 1$$

$$جمع \text{ ریشه‌ها} > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow \underbrace{\frac{-m}{m-1}}_{+} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0$$

$$برقرار است. \rightarrow \frac{1}{m-1} \geq 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{m-1}}_{+} \geq 0 \rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} \geq 0$$

نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نمی‌باشد زیرا اشتراک جواب‌های بدست آمده، تهی است.

۸۶) باید معادله $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع

$y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ محور x ‌ها را در طرفین محور y ‌ها قطع کند. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a} < 0$ ، پس:

$$\frac{a - \frac{3}{2}}{2} < 0 \Rightarrow a - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

۸۷) چون تابع درجه‌ی دوم محور طول‌ها را در $x = 3$ و $x = -2$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت

$y = a(x+2)(x-3)$ نشان داد و چون این تابع از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} 0 \\ -5 \end{vmatrix}$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -5 \end{vmatrix} \rightarrow -5 = a(2)(-3) \Rightarrow -5 = -6a \Rightarrow a = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{5}{6}(x+2)(x-3) = \frac{5}{6}(x^2 - x - 6) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 5$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{6}, b = -\frac{5}{6}, c = -5 \rightarrow a + b + c = -5$$

۸۸) نقطه‌ی $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ روی تابع قرار دارد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.



پس جمع ریشه‌ها یک واحد بیشتر از ضرب ریشه‌ها است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۴

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور x باشد، آن است که: $a < 0$ و $\Delta < 0$

$$a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac < 0} 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \xrightarrow{\div 4} (m-3)^2 + (1-m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $2 < m < 5$ می‌رسیم.

تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۵

$$f(0) = -2 \rightarrow c = -2$$

باتوجه به سهمی رسم شده، طول رأس سهمی وسط $x = 0$ و $x = -2$ است یعنی طول رأس سهمی $x_S = -1$ است.

$$x_S = -\frac{b}{2a} \rightarrow -1 = -\frac{b}{2a} \rightarrow 2a = b$$

$$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} \rightarrow -4 = \frac{-4a - b^2}{4a} \rightarrow -4 = \frac{-4a - 4a^2}{4a} \rightarrow -16a = -4a - 4a^2 \rightarrow 4a^2 - 12a = 0 \rightarrow 4a(a-3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق} \\ 2a = b & \\ a = 2 & \rightarrow b = 4 \end{cases}$$

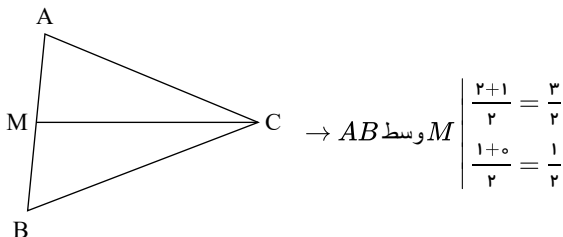
$$\text{پس: } f(x) = 2x^2 + 4x - 2 \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = -\frac{2}{2} = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۶ می‌دانیم مختصات رأس سهمی از رابطه $S \begin{cases} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$ به دست می‌آید، پس:

$$A \begin{vmatrix} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{vmatrix} \rightarrow A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x \text{ محور } y = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} B \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ C \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

مثلث ABC را در نظر گرفته، اکنون می‌خواهیم طول میانه CM را به دست آوریم.



$$\text{پس: } CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{\left(3 - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{صدق} \\ -2 & \end{vmatrix} \rightarrow -2 = 0 + 0 + c \rightarrow c = -2$$



$$x_S = 1 \rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow 2a = -b$$

$$y_S = -1 \rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = -1 \rightarrow \frac{-4a - b^2}{4a} = -1 \xrightarrow{2a = -b} \frac{-4a - 4a^2}{4a} = -1 \rightarrow -4a - 4a^2 = -4a \rightarrow 4a^2 + 4a = 0$$

$$\rightarrow 4a(a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow b = 2 \\ a = 0 \text{ غ ق} \end{cases} \rightarrow f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

در شکل (الف)، $a > 0$ و حاصل جمع دو ریشه منفی و حاصل ضرب آن‌ها صفر است، چون یکی از ریشه‌ها صفر می‌باشد. بنابراین:

$$P = \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow abc = 0$$

و در شکل (ب) دو ریشه قرینه هم می‌باشند، بنابراین $S = 0$ است.

بنابراین:

$$S = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow abc = 0$$

ولی در شکل (ج)، $a > 0$ و $S < 0$ و $P < 0$ است:

$$S = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

$$P = \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} c < 0$$

بنابراین $abc < 0$ است.

مختصات رأس سهمی از رابطه $S = \frac{-\frac{b}{2a}}{\frac{4ac-b^2}{4a}}$ بدست می‌آید. (۹۹) ۱ ۲ ۳ ۴

$$S \left| \frac{\frac{1}{2m}}{\frac{4m-1}{4m}} \right. \xrightarrow{\substack{\text{در ناحیه دوم، طول منفی} \\ \text{و عرض مثبت است}}} \begin{cases} \frac{1}{2m} < 0 \rightarrow 2m < 0 \rightarrow m < 0 & (I) \\ \frac{4m-1}{4m} > 0 \rightarrow \begin{array}{c} m \quad | \quad -\infty \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \frac{1}{4} \quad \quad \quad +\infty \\ \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad + \end{array} & (II) \end{cases}$$

از طرفی چون سهمی دارای ماکسیمم است ضریب x^2 باید منفی باشد یعنی $m < 0$ است (III) اشتراک سه جواب بدست آمده، $m < 0$ است.

رأس سهمی روی نیمساز ربع اول $(y = x)$ قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت $S \left| \alpha \right.$ است و چون سهمی، محور طول را در (۱۰۰) ۱ ۲ ۳ ۴

دو نقطه به طول ۱ و ۳ قطع کرده است، طول رأس سهمی دقیقاً وسط ۱ و ۳ است.

$$x_S = \frac{-1+3}{2} = 1 \rightarrow S \left| 1 \right.$$

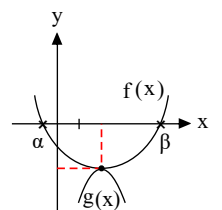
$$\text{معادله سهمی: } y = a(x-3)(x+1) \xrightarrow{S \left| 1 \right.} 1 = a(-2)(2) \rightarrow -4a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\text{معادله سهمی: } y = \frac{-1}{4}(x-3)(x+1) \xrightarrow{x=0} y = \frac{-1}{4}(-3)(1) = \frac{3}{4}$$

توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، می‌توان معادله آن را به صورت $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ نشان داد.

مرحله اول: ابتدا شکل مسأله را تصور می‌کنیم. برای این کار، اول رأس سهمی $g(x)$ را پیدا می‌کنیم. (۱۰۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2 \Rightarrow y_S = g(2) = -1$$



پس رأس سهمی $f(x)$ هم مشخص شد:

$$\left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right. \xrightarrow{x_S=2} \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \quad (I)$$



مرحله دوم: در صورت سؤال تفاضل ریشه‌ها داده شده است (۶ واحد)، پس داریم:

$$\beta - \alpha = 6 \quad (II) \xrightarrow{(I), (II)} \begin{cases} \frac{-b}{a} \\ \alpha + \beta = 4 \\ \beta - \alpha = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x + 1)(x - 5) \quad (*)$$

مرحله آخر جایگذاری رأس سهمی در معادله (*) است:

$$\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(*)} a(2+1)(2-5) = -1 \Rightarrow -9a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}(x^2 - 4x - 5) \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = \frac{1}{9}(1 - 4 - 5) = -\frac{8}{9}$$

با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت: ۱۰۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(0) = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.}$$

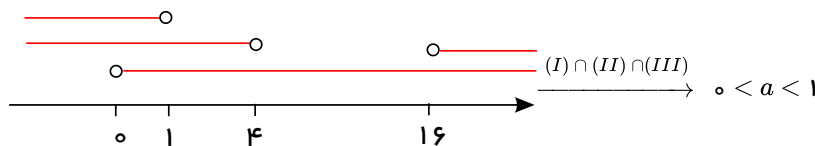
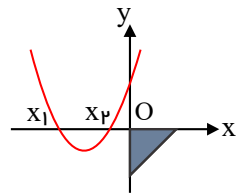
$$a > 0 \quad (I) \Rightarrow \text{تابع باید مینیمم داشته باشد.}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} a - 4 < 0 \Rightarrow a < 4 \quad (II)$$

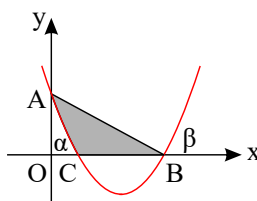
$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} c > 0 \Rightarrow \frac{9}{4} > 0 \quad \text{همواره برقرار است}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta = (a - 4)^2 - 9a = a^2 - 17a + 16 > 0$$

$$(a - 1)(a - 16) > 0 \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 16 \quad (III)$$

۱۰۳ ۱ ۲ ۳ ۴ به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور yها، $x = 0$ است.

$$\text{تابع} \quad x = 0 \rightarrow y_A = 1$$



نقاط برخورد منحنی با محور xها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S = \frac{(BC)(OA)}{2} \xrightarrow{OA=1, BC=|\alpha-\beta|} S = \frac{|\alpha-\beta|(1)}{2} = \frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:

$$1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow 2|a| = \sqrt{\Delta} \Rightarrow 2 = \sqrt{k^2 - 4} \Rightarrow 4 = k^2 - 4 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

۱۰۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا تابع درجه‌ی دوم داده شده را به صورت $f(x) = ax^2 + 2x + 2a - 1$ مرتب می‌کنیم. چون تابع درجه‌ی دوم دارایMin است بنابراین ضریب x^2 باید مثبت باشد یعنی $a > 0$ است (I). چون تابع دارای Min است و در ربع سوم قرار دارد پس محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند یعنی $\Delta > 0$ است.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4 - 4a(2a - 1) > 0 \rightarrow 4 - 8a^2 + 4a > 0$$

$$\rightarrow 8a^2 - 4a - 4 < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -\frac{1}{2} & 1 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \rightarrow \frac{-1}{2} < a < 1 : II$$

از اشتراک I و II به جواب $0 < a < 1$ می‌رسیم.



از طرفی طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{2a}$ نیز باید منفی باشد.

$$\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow \frac{-2}{2a} < 0 \rightarrow \text{برقرار است چون } 0 < a < 1 \text{ است.}$$

برای آن که عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت یا بالای محور x ها باشد، باید دو شرط زیر همواره برقرار باشد:

$$1) \Delta < 0 \quad 2) a > 0$$

ابتدا عبارت داده شده را کمی ساده می کنیم:

$$y = ax(x+1) + 1 \Rightarrow y = ax^2 + ax + 1$$

حال برای آن که عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow a(a-4) < 0 \Rightarrow 0 < a < 4 \\ a > 0 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $0 < a < 4$ می شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجه دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a = 0$ باشد نیز عبارت $y = ax^2 + ax + 1$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a = 0$ نیز درست است:

$$y = ax^2 + ax + 1 \xrightarrow{a=0} y = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$(0 < a < 4) \cup \{0\} = 0 \leq a < 4$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

که در بازه فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

معادله یک سهمی که مختصات رأس آن $S \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$ است به صورت $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ است چون این سهمی از نقطه $\left| \begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right.$ می

گذرد پس:

$$-1 = a(0 + 1)^2 - 3 \rightarrow a = 2$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت $y = 2(x + 1)^2 - 3$ یا به صورت ساده تر یعنی $y = 2x^2 + 4x - 1$ است. صفرهای این تابع همان ریشه های معادله $2x^2 + 4x - 1 = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 1 = 5$$

صورت کلی یک تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می باشد و نقطه $\left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right.$ رأس سهمی است که در تابع صدق

می کند و طولش از رابطه $x_s = \frac{-b}{2a}$ به دست می آید در ضمن نقطه $\left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right.$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می کند.

$$x_s = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 4a = -b \quad \text{و} \quad \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -1 = 4a + 2b + c \quad \text{و} \quad \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = c$$

$$-1 = 4a + 2b + c \xrightarrow{\substack{4a=-b \\ c=1}} -1 = -b + 2b + 1 \rightarrow b = -2, \quad a = \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع درجه دوم به صورت $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ است و با توجه به شکل، $x = \alpha$ ریشه ی بزرگ تر معادله ی $y = 0$ است.

$$y = 0 \xrightarrow{\times 2} x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8$$

$$\text{ریشه ی بزرگتر} = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

طول نقطه ی B یا همان رأس سهمی، میانگین طول های دو نقطه ی هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.



$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} -2 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = 4a - 2b + c \\ B \left| \begin{array}{l} -1 \\ -4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -4 = a - b + c \end{array} \right\} \xrightarrow{c=-2} \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ a - b = -2 \end{cases} \rightarrow a = 2, b = 4$$

$$C \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = 2x^2 + 4x - 2$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 4x - 2 = 0$ بدین صورت عمل می‌کنیم.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = -1$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها: } x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 4 - 2(-1) = 6$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۹**

گزینه اول: چون سهمی رو به بالا است پس $a > 0$ است و عرض از مبدأ سهمی، منفی است پس $c < 0$ است در ضمن طول رأس سهمی، منفی است یعنی:

$$\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{+} < 0 \rightarrow -b < 0 \rightarrow b > 0 \xrightarrow{a>0, b>0, c<0} abc < 0 \rightarrow \text{گزینه اول نادرست است.}$$

گزینه دوم: از روی شکل مشخص است که تابع دارای دو ریشه مختلف‌العلامت است که اندازه ریشه منفی بزرگ‌تر از ریشه مثبت است یعنی: $\alpha\beta < 0$ و $\alpha + \beta < 0$.

$$\text{گزینه دوم درست است.} \rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\underbrace{\alpha + \beta}_{-})^3 - \underbrace{3\alpha\beta(\alpha + \beta)}_{+} < 0$$

گزینه سوم: تابع داده شده دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است یعنی:

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow b^2 > 4ac \rightarrow \frac{b^2}{4} > ac \rightarrow \text{گزینه سوم نادرست است.}$$

گزینه چهارم: می‌دانیم $x_S = \frac{\alpha + \beta}{2}$ و $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است پس $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ بوده و این گزینه نیز نادرست است.

کافی است که مختصات سه نقطه داده شده را در تابع صدق دهیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۰**

$$A \left| \begin{array}{l} 0 \\ 5 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} B \left| \begin{array}{l} -2 \\ 5 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 4a - 2b + 5 \rightarrow 4a - 2b = 0 \\ C \left| \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 11 = a + b + 5 \rightarrow a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ است که نقطه $\left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right|$ روی این تابع قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۱

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و این طول را در تابع قرار می‌دهیم عرض آن به دست می‌آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ است که نقطه $\left| \begin{array}{l} 5 \\ -9 \end{array} \right|$ روی این تابع قرار دارد.

باتوجه به صورت سؤال مشخص است که α و β ریشه‌های معادله $p(x) = mx^2 - x + (m - 3) = 0$ هستند. باتوجه به آن که

$x = 1$ بین دو ریشه و $x = 2$ خارج دو ریشه قرار دارد، پس علامت $p(1)$ و $p(2)$ متفاوت است:



$$\begin{cases} p(1) = m - 1 + (m - 3) = 2m - 4 = 2(m - 2) \\ p(2) = 4m - 2 + (m - 3) = 5m - 5 = 5(m - 1) \end{cases}$$

تعیین علامت

$$p(1)p(2) < 0 \rightarrow 1 \cdot (m - 1)(m - 2) < 0 \rightarrow (m - 1)(m - 2) < 0 \rightarrow 1 < m < 2$$

۱۱۳ با توجه به جدول تعیین علامت، $f(x) = 0$ دارای ۲ ریشه می باشد، بنابراین $\Delta > 0$ می باشد. از طرفی، با رجوع کردن به جدول، مابین دو ریشه، علامت مثبت می باشد که طبق این مطلب باید ضریب x^2 منفی باشد.

$$I) \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) \left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 + m + 2 > 0 \Rightarrow -m + 3 > 0 \Rightarrow m < 3 \quad (I)$$

$$II) a < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $m \in (-1, 2)$ می رسیم.

۱۱۴ با توجه به جدول تعیین علامت می توان گفت که عبارت دارای ریشه مضاعف $x = 2$ است.

$$\text{ریشه مضاعف} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4a}{-6} = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow f(x) = -3x^2 + 12x + b$$

از طرفی $x = 2$ ریشه است یعنی $f(2) = 0$ است بنابراین:

$$-12 + 24 + b = 0 \rightarrow b = -12 \rightarrow a - b = 3 - (-12) = 15$$

۱۱۵ باید نامعادله $\frac{x^2}{2} + x - 4 < \frac{-5}{2}$ را حل کنیم.

$$\frac{x^2}{2} + x - 4 < \frac{-5}{2} \xrightarrow{\times 2} x^2 + 2x - 8 < -5 \rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\rightarrow (x + 3)(x - 1) < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & & -3 & & 1 & & +\infty \\ \hline & & + & & 0 & - & & 0 & + \end{array}$$

$$\rightarrow -3 < x < 1 \rightarrow x \in (-3, 1) \rightarrow a - b = 1 - (-3) = 4$$

۱۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$xf(x) - x^2 < 0 \Rightarrow x(f(x) - x) < 0$$

مطابق شکل در فاصله $(0, 2)$ تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد یعنی $f(x) - x > 0$ و در فاصله $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ پایین خط $y = x$ قرار دارد یعنی $f(x) - x < 0$ می شود.

	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
x	-	۰	+	+
$f(x) - x$	-	۰	+	-
$x(f(x) - x)$	+	۰	+	-

$\Rightarrow x \in (2, +\infty)$

۱۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left(\frac{1}{3}x + 4\right)(\sqrt{x} + 1) > x + x\sqrt{x} \rightarrow \left(\frac{1}{3}x + 4\right)(\sqrt{x} + 1) > x(1 + \sqrt{x}) \rightarrow \left(\frac{1}{3}x + 4\right)(\sqrt{x} + 1) - x(1 + \sqrt{x}) > 0$$

$$\frac{\text{فاکتورگیری از}}{(1 + \sqrt{x})} \rightarrow (1 + \sqrt{x})\left(\frac{1}{3}x + 4 - x\right) > 0 \xrightarrow{\text{عبارت}} -\frac{2}{3}x + 4 > 0 \Rightarrow 4 > \frac{2}{3}x \Rightarrow 6 > x$$

همواره مثبت است.

توجه داشته باشید که x به دلیل قرار گرفتن در زیر رادیکال باید همواره بزرگ تر یا مساوی صفر باشد و لذا مجموعه جواب نهایی برابر است با:

$$0 \leq x < 6$$

واضح است که این بازه شامل دو عدد صحیح مضرب ۳ است.

$$x = 0, x = 3$$



$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 9} \leq 0 \rightarrow \frac{x(x^2 - 1)}{(x - 3)^2} \leq 0 \rightarrow \frac{x(x + 1)(x - 1)}{(x - 3)^2} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} \leq 0 \quad \begin{array}{c|cccccccc} -\infty & -1 & 0 & 1 & 3 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

شامل یک عدد طبیعی است.

$$\frac{1}{1-x} < \frac{1}{2-x} \rightarrow \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} < 0 \rightarrow \frac{2-x-1+x}{(1-x)(2-x)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{(1-x)(2-x)} < 0 \rightarrow (1-x)(2-x) < 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} \leq 0 \quad \begin{array}{c|cccc} -\infty & 1 & 2 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \rightarrow 1 < x < 2$$

عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت است چون $a > 0$ و $\Delta < 0$ است بنابراین می‌توانیم طرفین وسطین کنیم.

$$2ax^2 - ax - 6 \geq -6x^2 - 6x - 6 \rightarrow (2a + 6)x^2 + (6 - a)x \geq 0$$

شرط آنکه $ax^2 + bx + c \geq 0$ باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta \leq 0$ باشد.

$$a > 0 \rightarrow 2a + 6 > 0 \rightarrow 2a > -6 \rightarrow a > -3 \quad (I)$$

$$\Delta \leq 0 \rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \rightarrow (6 - a)^2 - 0 \leq 0 \rightarrow a = 6 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $a = 6$ می‌رسیم.برای این که عبارت همواره بزرگ‌تر از صفر باشد صورت و مخرج باتوجه به ضریب x^2 که مثبت است باید مثبت باشند و می‌دانیمشرط آن که یک عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$\Delta_{\text{صورت}} < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow a^2 - 4 < 0 \rightarrow -2 < a < 2 \rightarrow a = \text{مقدار صحیح} \rightarrow a = -1$$

$$\Delta_{\text{مخرج}} < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 4 - 4b < 0 \rightarrow b > 1 \rightarrow b = \text{مقدار صحیح} \rightarrow b = 2$$

پس حداقل مقدار صحیح $a + b$ برابر یک است.

نامعادله را به دو نامعادله مجزا تقسیم می‌کنیم.

$$x \leq \frac{x^2}{x-1} \rightarrow \frac{x^2}{x-1} - x \geq 0 \rightarrow \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} \geq 0 \quad \begin{array}{c|cccc} -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x > 1 \quad (I)$$

$$\frac{x^2}{x-1} < 1 \rightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \xrightarrow[\text{صورت همواره مثبت است.}]{(a > 0, \Delta < 0)} x - 1 < 0 \rightarrow x < 1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x \leq 0$ می‌رسیم.

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} > 0 \quad \begin{array}{c|cccc} -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4 \quad (I)$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \rightarrow \frac{x}{\text{عبارت}} < 0 \quad \begin{array}{c|cccc} -\infty & -6 & -1 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$



$$\rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۴

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \rightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x-4}{x+1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 2 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & - & + \end{array}$$

توجه کنید $x=2$ مخارج را صفر می‌کند.

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x=0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می‌شود}$$

$$x=3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۵

$$\frac{x^3}{1+x^2} \leq \frac{x^2}{1+x^3} \rightarrow \frac{x^3}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^3} \leq 0 \rightarrow \frac{x^3(1+x^3) - x^2(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x^3)} \leq 0 \rightarrow \frac{x^3+x^6-x^2-x^4}{(1+x^2)(1+x^3)} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{x^3(1-x)}{(1+x^2)(1+x^3)} \leq 0 \rightarrow \begin{cases} x^3=0 \rightarrow x=0 \\ 1-x=0 \rightarrow x=1 \\ 1+x^2=0 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ 1+x^3=0 \rightarrow x=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 0 & 1 & +\infty \\ \hline & + & - & 0 & + & - \end{array}$$

$$\rightarrow x \in (-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

بنابراین بی‌شمار عدد صحیح در این نامعادله صدق می‌کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۶

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1}{1} > 0 \rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 0 & +\infty \\ \hline & + & - & 0 & + \end{array} \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{1} < 0 \rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \rightarrow \frac{-x-4}{x+1} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -4 & -1 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & - \end{array} \rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$



اشتراک II, I $\rightarrow x < -4$ یا $x > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند. $\rightarrow$ درست: $-1 < \frac{11}{4} < 3$ نامعادله $x = -5$

گزینه چهارم حذف می‌شود. $\rightarrow$ نادرست: $-1 < -1 < 3$ نامعادله $x = 0$

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲۷)

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 2 & +\infty \\ \hline & - & + & - & + \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & +\infty \\ \hline & - & + & - & + \end{array}$$

$$\rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > \frac{4}{5} \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $\frac{4}{5} < x < 2$ می‌رسیم ($0.8 < x < 2$)

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند $\rightarrow$ درست: $1 < \frac{2.5}{2} < 3$ نامعادله $x = 1.5$

گزینه سوم حذف می‌شود $\rightarrow$ درست: $1 < 2 < 3$ نامعادله $x = 1$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲۸)

زمان انجام کار توسط ماشین تندتر x و زمان انجام کار توسط ماشین کندتر $2x$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{2x} \rightarrow 12 = 2x \rightarrow x = 6 \rightarrow 2x = 12$$

در طرف چپ تساوی مخارج مشترک می‌گیریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲۹)

$$\frac{m}{x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+4}{x^2-x-2} \Rightarrow \frac{mx+m+x^2-2x}{x^2-x-2} = \frac{2x+4}{x^2-x-2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -1, 2} mx+m+x^2-2x=2x+4 \Rightarrow x^2+(m-4)x+(m-4)=0 \quad (*)$$

اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، با توجه به این که یک ریشه معادله از قرینه ریشه دیگر یک واحد بیش تر است، داریم:

$$\alpha = -\beta + 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \quad (**)$$

با توجه به معادله (*) جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{m-4}{1} \xrightarrow{(**)} -\frac{m-4}{1} = 1 \Rightarrow m = 3$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳۰)

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{x+5-x-3}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \frac{2}{x^2+8x+15} = \frac{2}{x^2-1}$$



$$\Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 - 1 \Rightarrow 8x = -16 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow a = -2$$

در نتیجه:

$$\frac{4a+1}{a} = \frac{4(-2)+1}{-2} = \frac{-7}{-2} = 3,5$$

۱۳۱) اگر شیر A در t_A ساعت و شیر B در t_B ساعت و شیر C در t_C ساعت استخر را پر کنند، ۳ شیر A و B و C با هم در $t = 2$ ساعت استخر را پر می‌کنند، پس:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} + \frac{1}{t_C} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{t_C} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \rightarrow t_C = 3 \text{ ساعت}$$

۱۳۲) اگر بهروز بتواند به‌تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به‌تنهایی در $k+9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \rightarrow k^2 - 31k - 180 = 0 \rightarrow (k-36)(k+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} k=36 \\ k=-5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۱۳۳) هر تیم باید با $n-1$ تیم دیگر مسابقه دهد. پس در مرحله اول $\frac{n(n-1)}{2}$ مسابقه برگزار شده و در رقابت بین سه تیم برتر با

$$\text{همین استدلال } \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ مسابقه برگزار می‌شود؛ یعنی داریم:}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + 3 = 69 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 66 \Rightarrow n(n-1) = 132$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow (n-12)(n+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=12 \text{ ق} \\ n=-11 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۴

$$\frac{a+1}{-x(x-1)} + \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{a+1-x}{-x(x-1)} = 1$$

$$\rightarrow a+1-x = -x^2+x \Rightarrow x^2-2x+a+1=0$$

برای داشتن ریشه مضاعف باید $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(a+1) = 0 \Rightarrow 4 - 4(a+1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

اما به‌ازای $a=0$ معادله $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ به‌صورت $x^2 - 2x + 1 = 0$ خواهد بود که $(x-1)^2 = 0$ است و ریشه مضاعف $x=1$ را داریم که غیرقابل قبول است (زیرا مخرج را صفر می‌کند). پس هیچ مقداری برای a قابل قبول نیست.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۵

$$\frac{x^2+ax+4}{x^2-2x-3} = 0 \rightarrow x^2+ax+4=0, \rightarrow x^2-2x-3 \neq 0 \rightarrow (x-3)(x+1) \neq 0$$

$$\rightarrow x \neq 3, x \neq -1$$

برای این‌که معادله یک ریشه داشته باشد، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ یک ریشه داشته باشد، پس باید $\Delta = 0$ باشد و داریم:

$$a^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow a^2 - 16 = 0 \rightarrow a = \pm 4$$

$$\begin{cases} a=4 \rightarrow x^2+4x+4=0 \rightarrow (x+2)^2=0 \rightarrow x=-2 \checkmark \\ a=-4 \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x=2 \checkmark \end{cases}$$

۲- معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=3$ باشد و داریم:



$$3^2 + a(3) + 4 = 0 \rightarrow 3a = -13 \rightarrow a = -\frac{13}{3} \rightarrow x^2 - \frac{13}{3}x + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 0 \rightarrow x = 3, x = \frac{4}{3} \rightarrow a = -\frac{13}{3} \text{ قابل قبول است.}$$

۳- معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x = -1$ باشد و داریم:

$$(-1)^2 + a(-1) + 4 = 0 \rightarrow -a + 5 = 0 \rightarrow a = 5 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \rightarrow x = -1, x = -4 \rightarrow a = 5 \text{ قابل قبول است.}$$

۴ مقدار برای a داریم یعنی $\{5, -\frac{13}{3}, \pm 4\}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۶

$$\frac{m+1}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2} \rightarrow \frac{m+1}{3x} = \frac{x-5}{x(x-4)}$$

$$\rightarrow (m+1)(x-4) = 3(x-5) \rightarrow (m+1)x - 4m - 4 = 3x - 15$$

$$\rightarrow (m-2)x = 4m - 11 \rightarrow x = \frac{4m-11}{m-2}$$

از آنجایی که $x = 0$ و $x = 4$ مخرج معادله را صفر می‌کنند، اگر جواب به دست آمده یکی از این اعداد باشد معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x = 0 \rightarrow 4m - 11 = 0 \rightarrow m = \frac{11}{4}$$

$$x = 4 \rightarrow \frac{4m-11}{m-2} = 4 \rightarrow 4m - 11 = 4m - 8 \rightarrow -11 = -8 \rightarrow \text{غیر ممکن}$$

همچنین اگر $m - 2 = 0$ باشد، معادله ریشه ندارد، یعنی در حالت $m = 2$ نیز ریشه وجود ندارد.

۱۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب

$v + 100$ و در خلاف جهت حرکت آب $100 - v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \rightarrow t_2 - t_1 = 5 \rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = 5 \rightarrow \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \rightarrow (v-20)(v+500) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ فوق} \\ v = -500 \text{ غلط} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 20$ برسید.

۱۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ ریشه معادله در معادله صدق می‌کند.

$$x = -2 \rightarrow 4 - 2 + \frac{4}{4-2+2} + m = 0 \rightarrow 2 + 1 + m = 0 \rightarrow m = -3$$

$$\text{پس: } x^2 + x + \frac{4}{x^2 + x + 2} - 3 = 0 \rightarrow x^2 + x + 2 + \frac{4}{x^2 + x + 2} - 5 = 0$$



$$\frac{x^2 + x + 2 = t}{\rightarrow t + \frac{4}{t} - 5 = 0} \xrightarrow{\times t} t^2 + 4 - 5t = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

مجموع ضرایب معادله برابر صفر است پس:

$$\begin{cases} t = 1 \rightarrow x^2 + x + 2 = 1 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد.} \\ t = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 + x + 2 = 4 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow x = -2, x = 1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۱- است.

۱۳۹) ۱ ۲ ۳ ۴ کل کار تکمیل پازل را ۱ واحد فرض می‌کنیم. حال اگر مدت زمانی را که در ابتدا طول می‌کشید تا نگین، پازل را به‌تنهایی تکمیل کند،

t در نظر بگیریم، در این صورت میزان تکمیل پازل در یک ساعت توسط نگین و امیر به‌ترتیب، برابر $\frac{1}{t}$ و $\frac{1}{t+6}$ بوده است. در نتیجه بنابر فرضیات مسئله در حال حاضر، خواهیم داشت:

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} = \frac{1}{4} \xrightarrow{t \neq 0, -6} 4t(t+6) \left(\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} = \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow t^2 - 14t - 72 = 0 \Rightarrow (t-18)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 18 \\ t = -4 \text{ (غقی)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} t'_{\text{نگین}} &= \frac{t}{3} = 6 \\ t'_{\text{امیر}} &= \frac{t+6}{2} = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |t'_{\text{نگین}} - t'_{\text{امیر}}| = 6$$

۱۴۰) ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت پرواز پرنده را v در نظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت $v+5$ وسرعت برگشت $v-5$ است.

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v+5} \text{ مسیر رفت} \\ t_2 = \frac{1}{v-5} \text{ مسیر برگشت} \end{cases} \rightarrow t_1 + t_2 = \underbrace{9}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \underbrace{\frac{9}{60}}_{\text{ساعت}}$$

$$\rightarrow \frac{v-5+v+5}{(v+5)(v-5)} = \frac{3}{20} \rightarrow \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20} \rightarrow 3v^2 - 75 = 40v$$

$$\rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1600 + 900 = 2500} \begin{cases} v_1 = \frac{40+50}{6} = 15 \text{ قق} \\ v_2 = \frac{40-50}{6} = \frac{-5}{3} \text{ غقی} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 15$ برسید.

۱۴۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+3 = 1+x-1+2\sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = x-1 \Rightarrow x = 1 + \frac{9}{4} = 3,25$$

۱۴۲) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x-3) = x \rightarrow 4x - x = 12 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$$

۱۴۳) ۱ ۲ ۳ ۴



$$\sqrt{2x+3} = 3x+2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x+3 = 9x^2+4+12x$$

$$\rightarrow 9x^2+10x+1=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{9} \rightarrow 9x+3 = -1+3=2 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۴

از آنجایی که $x = -1$ جواب معادله است در معادله صدق می‌کند؛ داریم:

$$\sqrt{x^2+ax+17} = ax-2 \xrightarrow{x=-1} \sqrt{(-1)^2+a(-1)+17} = a(-1)-2$$

$$\rightarrow \sqrt{18-a} = -a-2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 18-a = a^2+4a+4$$

$$\rightarrow a^2+5a-14=0 \rightarrow (a+7)(a-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+7=0 \rightarrow a=-7 \rightarrow \sqrt{18-(-7)} = -(-7)-2 \checkmark \\ a-2=0 \rightarrow a=2 \rightarrow \sqrt{18-2} = -2-2 \times \end{cases} \rightarrow \text{جواب معادله } a=-7 \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۵

$$\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16} = A$$

$$\rightarrow (\sqrt{4x+8} + \sqrt{4x-16})(\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16}) = (\sqrt{4x+8} - \sqrt{4x-16})A$$

$$\rightarrow (4x+8) - (4x-16) = 3A$$

$$24 = 3A \rightarrow A = 8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۶

$$3a + \sqrt{2a^2+4a} = 2 \rightarrow \sqrt{2a^2+4a} = 2-3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2+4a = 4+9a^2-12a \rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{16+12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{16-12}{14} = \frac{2}{7} \text{ قی} \end{cases}$$

$$\text{پس: } \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۷ اگر $\sqrt{3x-2x^2} = A$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$A + \frac{1}{A} = 2 \xrightarrow{\times A} A^2+1=2A \rightarrow A^2-2A+1=0 \rightarrow (A-1)^2=0 \rightarrow A=1 \rightarrow \sqrt{3x-2x^2}=1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x-2x^2=1 \rightarrow 2x^2-3x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \in \mathbb{N} \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

بنابراین معادله فقط دارای یک ریشه طبیعی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۸

$$\sqrt{4x-3} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x-3+3x+1-2(\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1}) = 2-x$$



$$\rightarrow 7x - 2 + x - 2 = 2(\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1}) \rightarrow 8x - 4 = 2(\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1})$$

$$\rightarrow 4x - 2 = (\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1}) \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16x^2 - 16x + 4 = 12x^2 + 4x - 9x - 3$$

$$\rightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \text{معادله} \\ x = 1 \rightarrow 1 - 2 = 1. \text{ امکان ندارد.} \\ x = \frac{c}{a} = 1 = \frac{7}{4} \xrightarrow{\text{معادله}} 2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}. \text{ امکان ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین معادله ریشه ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۹

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a+16} = 1 - 2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a + 16 = 1 + 4a^2 - 4a$$

$$\rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289} \begin{cases} \text{غقیق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{7+17}{8} = 3 \\ \text{قق} \\ a = \frac{7-17}{8} = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

$$\text{پس : } 4a + 9 = 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 9 = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۰

$$1 + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + 1 + x^2 + 2\sqrt{1+x^2} = 1 + x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1+x^2} = \overbrace{-x^2+x-1}^{a < 0, \Delta < 0}$$

سمت چپ تساوی فوق همواره مثبت و سمت راست آن همواره منفی است، پس معادله ریشه ندارد. توجه کنید که یک عبارت درجه دوم وقتی همواره منفی است که $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۱

$$(x+1)(2x+5) = \sqrt{-(x+3)(2x+1)} \rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = \sqrt{-(2x^2 + 7x + 3)}$$

$$\xrightarrow{2x^2+7x=t} t+5 = \sqrt{-(t+3)} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 + 25 + 10t = -t - 3$$

$$\rightarrow t^2 + 11t + 28 = 0 \rightarrow (t+4)(t+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -7 \end{cases} \text{ غقیق (در معادله صدق نمی‌کند).}$$

$$t = -4 \rightarrow 2x^2 + 7x = -4 \rightarrow 2x^2 + 7x + 4 = 0 \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۲

با فرض $3x^2 + 2x - 1 = t$ معادله را حل می‌کنیم.

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 1 \rightarrow \sqrt{t+3} = 1 - \sqrt{t} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t+3 = 1+t-2\sqrt{t} \rightarrow 2\sqrt{t} = -2 \rightarrow \sqrt{t} = -1 \rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$\text{معادله گنگ داده شده را به گونه‌ای می‌نویسیم که رادیکال‌ها در طرفین تساوی باشند. سپس طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵۳

$$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x+1) + 1 - 2\sqrt{x+1} = 2x-5 \Rightarrow -x+7 = 2\sqrt{x+1}$$



$$(-x + 7)^2 = (2\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 4(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow (x-15)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=15 \end{cases}$$

غ ق (در معادله صدق نمی‌کند).

در نتیجه:

$$a=3 \Rightarrow a^2 + a = 9 + 3 = 12$$

$$154 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{با فرض } x^2 + x = A \text{ داریم:}$$

$$A - 8 = \sqrt{A+4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 + 64 - 16A = A + 4 \rightarrow A^2 - 17A + 60 = 0$$

$$(A-5)(A-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=5 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ A=12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \end{cases}$$

$$155 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{ابتدا معادله داده شده را ساده می‌کنیم:}$$

$$x^2 - 2x + 3 = \sqrt{x^2 - 2x + 5} \rightarrow (x^2 - 2x + 5) - 2 = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

با تغییر متغیر $t = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ معادله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$t^2 - 2 = t \rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

واضح است که جواب‌های معادله بالا $t = 2$ و $t = -1$ هستند. با توجه به آن که t برابر با رادیکال (فرجه زوج) یک عبارت است، پس نمی‌تواند مقادیر منفی را بپذیرد. پس تنها جواب $t = 2$ مورد قبول است:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 5 = 4 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$$

معادله بالا یک ریشه مضاعف $x = 1$ دارد.

$$156 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{اگر عدد مفروض را } a \text{ و جذر آن را } k \text{ در نظر بگیریم، داریم:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = k \\ \sqrt{a+2} = k+1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \sqrt{a+2} - \sqrt{a} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} + 1 = \sqrt{a+2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a + 1 + 2\sqrt{a} = a + 2 \Rightarrow 2\sqrt{a} = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} + a = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین:

$$157 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{حاصل جمع دو عبارت نامنفی صفر است. پس هر کدام باید صفر باشند. بنابراین:}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1, x=2$$

چون معادله فقط یک ریشه دارد، پس تنها یکی از دو مقدار فوق باید عبارت زیر رادیکال دوم را صفر کند.

$$\sqrt{x^3 - ax + a - 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow \sqrt{1-a+a-2} = \sqrt{-1} \text{ غ ق} \\ x=2 \rightarrow \sqrt{8-2a+a-2} = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{6-a} = 0 \Rightarrow 6-a=0 \Rightarrow a=6 \end{cases}$$

$$158 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \text{عدد مورد نظر را } x \text{ در نظر می‌گیریم.}$$

$$x = \sqrt{x} - \frac{1}{\lambda} \rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{\lambda} = 0 \rightarrow (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\sqrt{x} = t \rightarrow t^2 - t + \frac{1}{\lambda} = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{\lambda}}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda}}{2\lambda} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda + 4\sqrt{\lambda}}{16} = x_1 \\ t_2 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda}}{2\lambda} = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\lambda - 4\sqrt{\lambda}}{16} = x_2 \end{cases}$$

$$\text{پس: } x_1 + x_2 = \frac{\lambda + 4\sqrt{\lambda}}{16} + \frac{\lambda - 4\sqrt{\lambda}}{16} = \frac{2\lambda}{16} = \frac{\lambda}{8}$$

کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به دست آید. دقت کنید $y \geq 3$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵۹)

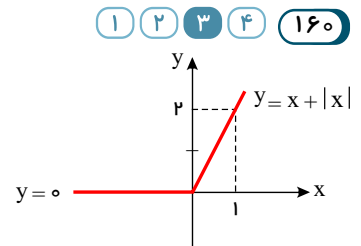
$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9} \xrightarrow{x^2=2y} \sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y = \pm 3 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ محل تلاقی: $A(\sqrt{6}, 3)$

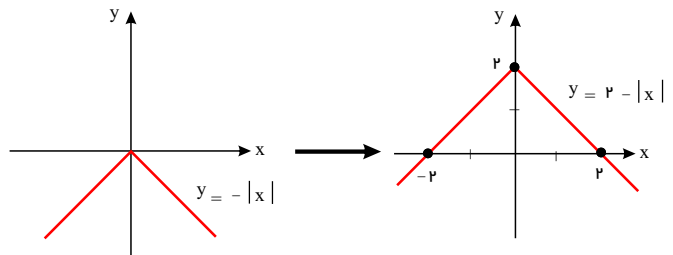
نکته: فاصله هر نقطه با فرم $A(x, y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\xrightarrow{\text{فاصله}} d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$y = x + |x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x + x \rightarrow y = 2x, & A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \\ x < 0 \rightarrow y = x - x \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

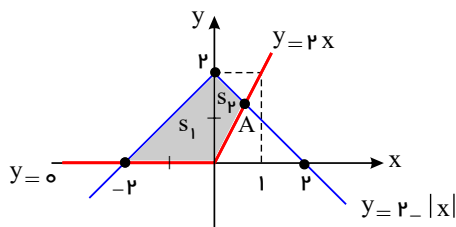


$$y = 2 - |x| \rightarrow$$



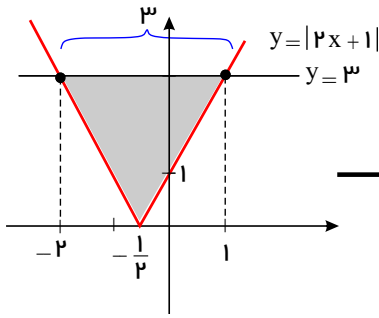
حال، کافی است این دو شکل را با هم رسم کنیم. برای پیدا کردن طول نقطه A ، کافی است که خط $y = 2x$ و $y = 2 - x$ را با هم تلاقی دهیم.

$$2x = 2 - x \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x_A = \frac{2}{3}$$



$$S_1 = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3}, \quad S_2 = \frac{\frac{2}{3} \times 2}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow S_{\text{کل}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$



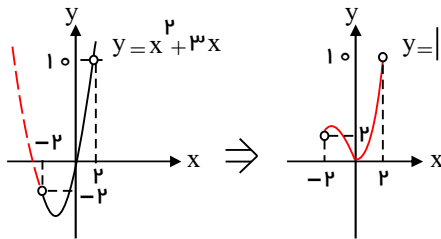
$$S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

دقت کنید که نقاطی به طولهای $x = -2$ و $x = 1$ از تلاقی تابع $y = |2x + 1|$ با خط $y = 3$ بدست آمده‌اند.

$$|2x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۱۶۲ (۱) (۲) (۳) (۴) باتوجه به شکل زیر، اگر دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + 3x$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$ باشد، برد

$y = |x^2 + 3x|$ آن، بازه‌ی $(0, 10]$ است.

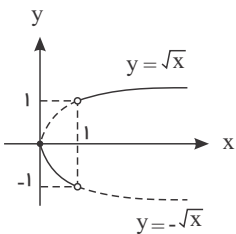


توجه کنید برای رسم تابع $y = |f(x)|$ ، هر آن چه از شکل $y = f(x)$ را که در زیر محور x ‌ها است آینه وار به بالا منتقل می‌کنیم.

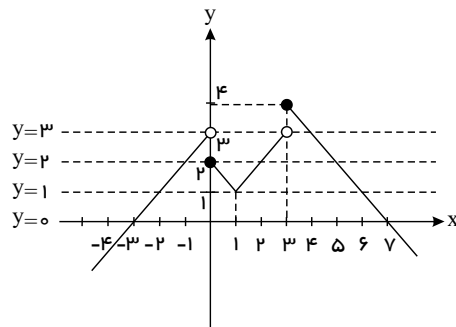
۱۶۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & x > 1 \\ \frac{-(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 1 \\ -\sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



۱۶۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ابتدا نمودار تابع چندضابطه‌ای f را رسم می‌کنیم:



خطوط $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$ به ترتیب نمودار f را در $2, 3, 4$ و 1 نقطه قطع می‌کنند، پس از بین خطوط داده شده، خط $y = 2$ در تعداد نقاط بیش‌تری تابع را قطع کرده است.

۱۶۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

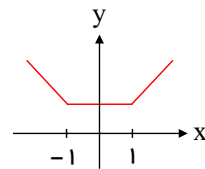
$$y = \sqrt{(x-1)^2} + |x+1| \rightarrow y = |x-1| + |x+1|$$

نمودار این تابع نمایشگر یک گلدان است.

پس باتوجه به شکل بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن نمودار تابع موازی محور x ‌ها می‌باشد، بازه‌ی $[-1, 1]$ است و داریم:

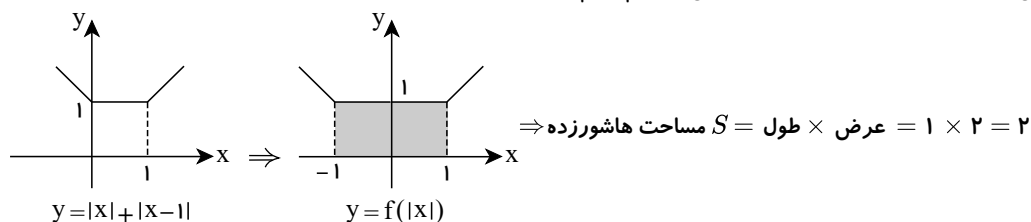


$$\text{Max}(b-a) = 1 - (-1) = 2$$



ابتدا نمودار تابع گلدانی $y = |x| + |x-1|$ را رسم می‌کنیم و برای رسم $f(|x|)$ باید آن قسمت از نمودار تابع که در سمت

چپ محور y ها قرار دارد حذف شود و سپس قرینه‌ی شکل را نسبت به محور عرض‌ها رسم کنیم.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۷

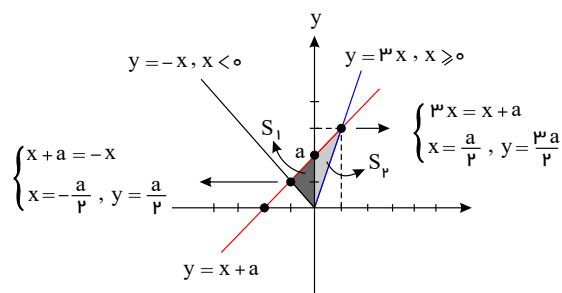
$$y = x + 2|x| = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \text{ (برای رسم)} \\ -x & x < 0 \text{ (نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم)} \end{cases}, \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$$y = x + a \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}, \begin{cases} 0 \\ -a \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{4}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{4}$$

$$S_1 + S_2 = 2 \rightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 2 \rightarrow \frac{a^2}{2} = 2 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \text{ غق ق}$$



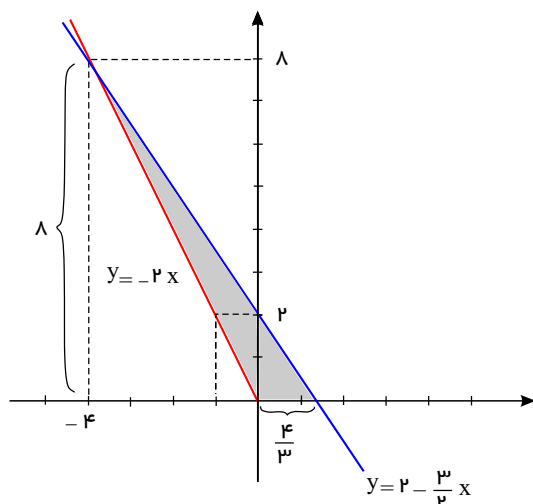
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۸

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ -x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

خط افقی $y = 0$ را به شرط $x \geq 0$ و خط $y = -2x$ با شرط $x < 0$ رسم می‌کنیم. برای رسم خط $y = -2x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ را روی آن

در نظر می‌گیریم و برای رسم خط $y = 2 - \frac{3}{2}x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ را روی آن در نظر

می‌گیریم.



$$\Rightarrow S = \frac{4 \times \frac{4}{5}}{2} = \frac{16}{5}$$

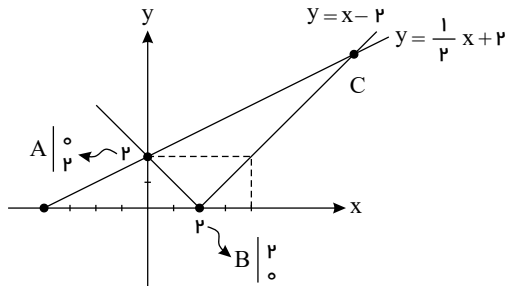


دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات $y = -2x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، آنها را تلافی می‌دهیم.

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \xrightarrow{\times 2} 4 - 3x = -4x \rightarrow x = -4$$

و بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه‌ی تلافی ۸ می‌شود.

دو تابع $y = \frac{1}{3}x + 2$ و $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶۹)



$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{3}x + 2 = x - 2 \rightarrow x = 8, y = 6 \rightarrow C \begin{vmatrix} 8 \\ 6 \end{vmatrix}$$

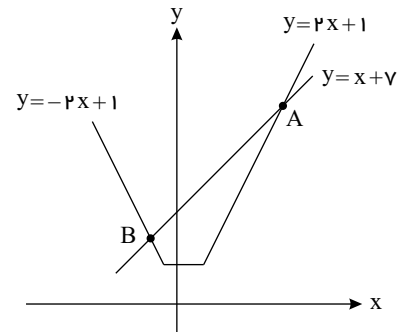
$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = \frac{1}{2} |0 + 2(6 - 2) + 8(2 - 0)| = \frac{1}{2} |8 + 16| = 12$$

تابع $y = |x-2| + |x+1|$ یک تابع گلدانی است که به ازای $x < -1$ اکیداً نزولی و به ازای $x > 2$ اکیداً صعودی و در فاصله $-1 \leq x \leq 2$ ثابت است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۷۰)

$$x < -1 : y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2 : y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2 : y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \begin{vmatrix} 8 \\ 15 \end{vmatrix}, \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(8+2)^2 + (15-5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۷۱)

می‌دانیم اگر $|f| = |g|$ باشد آن گاه $f = g$ یا $f = -g$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x - 2 \rightarrow x = -3 \\ 2x + 1 &= -x + 2 \rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

می‌دانیم اگر $|f(x)| \leq k$ باشد و $k > 0$ باشد، آنگاه $k \leq f(x) \leq k$ است پس: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۷۲)

$$||x-1| - 2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq |x-1| - 2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq |x-1| \leq 7$$

بدیهی است که نامساوی $-3 \leq |x-1|$ همواره درست است، در نتیجه:

$$|x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-1 \leq 7 \xrightarrow{+1} -6 \leq x \leq 8$$

بنابراین، بازهٔ جواب این نامعادله $[-6, 8]$ است که داریم:

$$[-6, 8] = [a, b] \Rightarrow b - a = 8 + 6 = 14$$

$$\left| \frac{f}{g} \right| = \frac{|f|}{|g|} \text{ می‌دانیم که } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{173}$$

$$\frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 \rightarrow |2-x| > |2x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + x^2 - 4x > 4x^2 + 9 - 12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < \frac{5}{3}$$

ولی دقت کنید که $x = \frac{3}{2}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ در می‌آید.

$$u^k = |u|^k, |f(x)| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq f(x) \leq k \text{ می‌دانیم: } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{174}$$

$$(x-2)^2 \leq |x-2| + 6 \rightarrow |x-2|^2 - |x-2| - 6 \leq 0 \rightarrow (|x-2|-3)(\underbrace{|x-2|+2}_{+}) \leq 0$$

$$\rightarrow |x-2|-3 \leq 0 \rightarrow |x-2| \leq 3 \rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \rightarrow -1 \leq x \leq 5 \rightarrow x \in [-1, 5]$$

بنابراین $b - a = 5 - (-1) = 6$.

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{175}$$

روش اول:

$$2x+1-|x-2| > \underbrace{x^2+1}_{+} \rightarrow 2x+1-|x-2| > x^2+1$$

$$x \geq 2: 2x+1-(x-2) > x^2+1 \rightarrow 2x+1-x+2 > x^2+1 \rightarrow x^2-x-2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \text{ (I)}$$

$$x < 2: 2x+1-(-x+2) > x^2+1 \rightarrow 2x+1+x-2 > x^2+1 \rightarrow x^2-3x+2 < 0 \rightarrow (x-1)(x-2) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \text{ (II)}$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $1 < x < 2$ یا $x \in (1, 2)$ می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادله داده شده به جای x ، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \rightarrow 0 + 1 - 2 > 1 \rightarrow -1 > 1$$

به نتیجه غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۳ و ۴ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینهٔ چهارم، جواب صحیح است.

$$\text{از تعیین علامت برای حل نامعادله استفاده می‌کنیم: } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{176}$$

$$\begin{cases} x \geq 0: 2x^2 - 1 < x \Rightarrow 2x^2 - x - 1 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{1}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x < 1 \\ x < 0: -2x^2 - 1 < x \Rightarrow -2x^2 - x - 1 < 0 \xrightarrow[\text{همواره برقرار است چون } a < 0, \Delta < 0]{\text{اشتراک با شرط}} R \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه برای یافتن جواب نامعادله با محاسبه‌ی اجتماع دو جواب حاصل شده داریم:

$$\text{مجموعه جواب: } (0 \leq x < 1) \cup (x < 0) = x < 1 \rightarrow x \in (-\infty, 1)$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{177}$$

روش اول:

ابتدا داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

برای حل این معادله، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$1) x < 1 \Rightarrow -(x-1) - (x-3) = 5 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ قابل قبول}$$

$$2) 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow (x-1) - (x-3) = 5 \Rightarrow 2 = 5 \text{ غیرقابل قبول}$$



$$\text{قابل قبول } x = \frac{9}{2} \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow (x-1) + (x-3) = 5 \Rightarrow x > 3$$

$$\text{مجموع جوابها} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4$$

روش دوم:

دقت کنید: اگر معادله $|x-a| + |x-b| = k$ دارای دو جواب متمایز باشد، آن گاه مجموع این دو جواب متمایز برابر با $a+b$ است، توجه کنید که اگر $k > |b-a|$ ، آن گاه این معادله دو جواب متمایز دارد.

$$(x_1 = \frac{a+b+k}{2}, x_2 = \frac{a+b-k}{2})$$

باتوجه به نکته‌ی بالا، معادله‌ی مفروض سؤال دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر است با: $1+3=4$

۱۷۸) شرط آنکه معادله $|x^2-3| = |2-a| - 1$ جواب حقیقی داشته باشد آن است که عبارت سمت راست، بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$|f(x)| \geq k \xrightarrow{k>0} \begin{cases} f(x) \geq k \\ \text{یا} \\ f(x) \leq -k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-a \geq 1 \rightarrow a \leq 1 \\ 2-a \leq -1 \rightarrow a \geq 3 \end{cases}$$

اجتماع دو جواب بدست آمده به صورت $(1, 3) - \mathbb{R}$ است.

۱۷۹) ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \sqrt{x+|x+2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x+|-x+2|} = \sqrt{|x-2|-x}$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم یعنی: $|x-2|-x \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2: x-2-x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \Rightarrow \emptyset \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \\ x < 2: -x+2-x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -2 \Rightarrow x \leq 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \leq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \leq 1$$

۱۸۰) ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < 2 \quad (II)$$

$$(I) \cup (II): -1 < x < 2$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 0 < 2 \quad \text{درست است (گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند)}$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < 1 \quad \text{درست است (گزینه‌ی ۱ حذف می‌شود)}$$

$$181) \quad |u| \geq 0 \text{ است بنابراین نتیجه می‌گیریم که } x \text{ نامنفی است و توجه کنید اگر } x \text{ نامنفی باشد عبارت } \frac{x+8}{2x+1} \text{ مثبت است یعنی:}$$

$$\left| \frac{x+8}{2x+1} \right| = \frac{x+8}{2x+1}$$

$$\frac{x+8}{2x+1} \leq x \xrightarrow{\times(2x+1)} x+8 \leq 2x^2+x \rightarrow 2x^2 \geq 8 \rightarrow x^2 \geq 4$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} x \geq 2 \rightarrow x \in [2, +\infty)$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۲

$$x^2 - x - 6 < 0 \rightarrow (x-3)(x+2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < x < 3$$

$$|x| < m \rightarrow -m < x < m$$

برای آنکه جواب $-2 < x < 3$ زیرمجموعه $-m < x < m$ باشد کم‌ترین مقدار m برابر ۳ خواهد بود.

$$|f(x)| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq f(x) \leq k \text{ می‌دانیم که } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 183$$

$$|2x-1| < x^2+1 \rightarrow -x^2-1 < 2x-1 < x^2+1$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x^2-1 < 2x-1 \rightarrow x^2+2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0 \\ 2x-1 < x^2+1 \rightarrow x^2-2x+2 > 0 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

$a > 0, \Delta < 0$
همواره مثبت

بنابراین جواب نامعادله به صورت $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ یا همان $\mathbb{R} - [-2, 0]$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۴

ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها $x = -2$ و $x = \frac{1}{2}$ هستند.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$		-	-	+
$x+2$		-	+	+

$$x < -2 \Rightarrow -2x+1-x-2=3 \Rightarrow -3x=4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

غ ق ق ۴

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x+1+x+2=3 \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$$

ق ق ۰

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1+x+2=3 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

ق ق ۲

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x| \text{ برای این منظور باید نامعادله‌ی } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 185$$

$$x \geq 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -\frac{9}{2} & 1 & +\infty \\ \hline & & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

عبارت < 0

اشتراک با شرط $x \geq 0$

$$\rightarrow \frac{-9}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x < 1 \quad (I)$$

$$x < 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -3 & \frac{3}{2} & +\infty \\ \hline & & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

عبارت < 0

اشتراک با شرط $x < 0$

$$\rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -3 < x < 0 \quad (II)$$



از اجتماع I و II به جواب $-3 < x < 1$ می‌رسیم که طول نقطه‌ی وسط بازه $\frac{-3+1}{2} = -1$ است.

سمت چپ عبارت همواره مثبت است بنابراین برای برقراری نامعادله، باید طرف راست نامنفی باشد. (۱۸۶) ۱ ۲ ۳ ۴

$$6x - 3 \geq 0 \rightarrow 6x \geq 3 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow |x| = x$$

بنابراین نامعادله به صورت $|x - 3| + x^2 \leq 6x - 3$ درمی‌آید.

$$x \geq \frac{1}{2} \rightarrow x - 3 + x^2 \leq 6x - 3 \rightarrow x^2 - 5x \leq 0 \rightarrow x(x - 5) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 5$$

اشتراک با شرط

$$\rightarrow 3 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 3 \rightarrow -x + 3 + x^2 \leq 6x - 3 \rightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \rightarrow (x - 1)(x - 6) \leq 0$$

تعیین علامت

اشتراک با شرط

$$\rightarrow 1 \leq x \leq 6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 \leq x < 3 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $1 \leq x \leq 5$ می‌رسیم.

$$x \in [1, 5] \rightarrow b - a = 5 - 1 = 4$$

(۱۸۷) ۱ ۲ ۳ ۴

$$|x^2 - 1| \leq |x + 1| \Rightarrow |x^2 - 1| - |x + 1| \leq 0 \Rightarrow |x + 1|(|x - 1| - 1) \leq 0$$

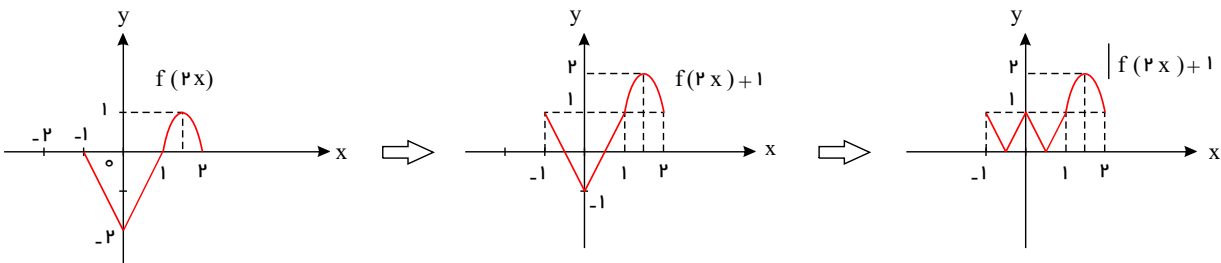
$$|x - 1| - 1 \leq 0 \Rightarrow |x - 1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

از طرفی $x = -1$ نیز جواب نامعادله است. پس مجموعه جواب $\{-1\} \cup [0, 2]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

(۱۸۸) ۱ ۲ ۳ ۴

$$|f(2x) + 1| - m = 0 \Rightarrow |f(2x) + 1| = m$$

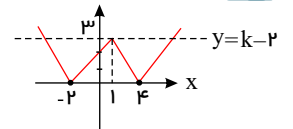
ابتدا نمودار $y = |f(2x) + 1|$ را رسم می‌کنیم.



برای این که خط افقی $y = m$ نمودار $y = |f(2x) + 1|$ را در ۴ نقطه قطع کند باید $0 < m \leq 1$ باشد.

معادله را به روش هندسی حل می‌کنیم. (۱۸۹) ۱ ۲ ۳ ۴

$$y_1 = |3 - |x - 1||, \quad y_2 = k - 2$$



خط $y = 3$ نمودار تابع را در ۳ نقطه قطع می‌کند بنابراین $k - 2 = 3$ و $k = 5$ است.

روش اول: باید نامعادله $|2x^2 - 4| < 2x$ را حل کنیم می‌دانیم که ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{2}$ هستند. (۱۹۰) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x < -\sqrt{2}: 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2$$

اشتراک با شرط

$$\rightarrow \emptyset$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}: -2x^2 + 4 < 2x \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 > 0 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$$

تعیین علامت

اشتراک با شرط

$$\rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < \sqrt{2}$$



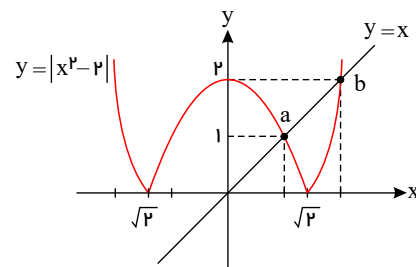
$$x > \sqrt{2} : 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \sqrt{2} < x < 2$$

از اجتماع جواب‌های بدست آمده به جواب $x \in (1, 2)$ می‌رسیم بنابراین $b - a = 1$ است.

روش دوم: تابع $y = |2x^2 - 4|$ و $y = 2x$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم در چه بازه‌ای تابع $y = |2x^2 - 4|$ زیر تابع $y = 2x$ قرار دارد.

$$|2x^2 - 4| < 2x \rightarrow |2(x^2 - 2)| < 2x \rightarrow |x^2 - 2| < x$$



برای این منظور باید نقاط a, b را پیدا کنیم.

$$|x^2 - 2| = x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 & b \\ x=-1 & \text{غ ق} \end{cases} \\ x^2 - 2 = -x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 & \text{غ ق} \\ x=1 & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسئله بازه $(1, 2)$ است و $b - a = 1$ است.

۱۹۱) باید نامعادله $(x-1)^2 > 4x^2$ را حل کنیم.

$$(x-1)^2 > 4x^2 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4x^2} \rightarrow |x-1| > 2x^2$$

$$x \geq 1 : x-1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\text{اشتراک با شرط } a > 0, \Delta < 0} \emptyset \xrightarrow{(I)} \emptyset$$

$$x < 1 : -x+1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & \frac{1}{2} & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < \frac{1}{2} \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $x \in (-1, \frac{1}{2})$ می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2}$ است.

۱۹۲) ۱ ۲ ۳ ۴

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = x - [x] + \underbrace{[x - [x]]}_0 = x - [x] = g(x)$$

دقت کنید که چون $0 \leq x - [x] < 1$ است پس $[x - [x]] = 0$ است.

۱۹۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \times \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{9+12\sqrt{2}+8}{9-8} = 17+12\sqrt{2} \sim 33.8 \rightarrow [17+12\sqrt{2}] = 33$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3+2\sqrt{2} \sim 5.8 \rightarrow [3+2\sqrt{2}] = 5$$

$$\text{پس: } M = \left[\frac{33}{5} \right] = [6.6] = 6$$

توجه کنید در محاسبات $\sqrt{2}$ را حدوداً ۱٫۴ در نظر گرفتیم.



$$\underbrace{4n^2 - 4n + 1}_{(2n-1)^2} < 4n^2 - 3n + 1 < \underbrace{4n^2}_{(2n)^2} \rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] = 2n - 1$$

$$\underbrace{n^2 - 4n + 4}_{(n-2)^2} < n^2 - 2n < \underbrace{n^2 - 2n + 1}_{(n-1)^2} \rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] = n - 2$$

$$\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] = (2n - 1) - 2(n - 2) = 3$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ مثلاً $n = 3$ را قرار دهیم.

$$n = 3 \rightarrow \left[\sqrt{36 - 9 + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{9 - 6} \right] = \underbrace{\left[\sqrt{28} \right]}_{5, \dots} - 2 \underbrace{\left[\sqrt{3} \right]}_{1, \dots} = 5 - 2(1) = 3$$

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = -2 \Rightarrow -2 \leq x + \frac{1}{2} < -1 \Rightarrow -2 - \frac{1}{2} \leq x < -1 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{3}{2} \Rightarrow -5 \leq 2x < -3 \Rightarrow [2x] = -5, -4$$

$$\left[\frac{1-x}{x} \right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1-x}{x} < 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} - 1 < 2 \rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} < 3$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{x}} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-6)} -2 > -6x \geq -3 \Rightarrow [-6x] = -3$$

توجه کنید اگر طرفین یک نامعادله که هم علامت باشند را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می شود.

$$f(g(2)) = f(1 - 2\sqrt{2}) = 2(1 - 2\sqrt{2}) - [1 - 2\sqrt{2}]$$

$$= 2 - 4\sqrt{2} - [-1, 8] = 2 - 4\sqrt{2} - (-2) = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

$$1 - 2\sqrt{2} \simeq 1 - 2(1, 4) = 1 - 2, 8 = -1, 8$$

دقت کنید که:

$$|2x + 1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x + 1 < 1 \Rightarrow -2 < 2x < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \end{cases} \Rightarrow [x] + [x^2] = -1$$

$$gof(x) = x - [x] \rightarrow g(f(x)) = x - [x] \rightarrow g(x^3 - \sqrt{2}) = x - [x]$$

برای محاسبه‌ی $g(\sqrt{2})$ کافی است $x^3 - \sqrt{2}$ را برابر $\sqrt{2}$ قرار دهیم.

$$x^3 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \rightarrow x^3 = 2\sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$g(x^3 - \sqrt{2}) = x - [x] \xrightarrow{x=\sqrt{2}} g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - [1, 4] = \sqrt{2} - 1$$

$$|f(x)| < k \xrightarrow{k>0} -k < f(x) < k \quad \text{می دانیم:}$$

$$\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1 \rightarrow -1 < \frac{x-3}{2} < 1 \rightarrow -2 < x-3 < 2 \rightarrow 1 < x < 5$$

اکنون باید حدود $\frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$ را پیدا کنیم.

$$1 < x < 5 \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1 \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{5} < \frac{2}{x} < 2 \rightarrow \underbrace{\frac{7}{5}}_{1, 4} < \frac{2}{x} + 1 < 3$$



پس: $\left[\frac{x+2}{x} \right] = \underbrace{\left[1 + \frac{2}{x} \right]}_{\text{بین ۱ تا ۳}} = ۱ \text{ یا } ۲$

توجه کنید اگر طرفین یک نامساوی را که هم علامت هستند را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می شود.

می دانیم: $|f(x)| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq f(x) \leq k$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۱)

$|1-x^2| < 1-x \rightarrow -1+x < 1-x^2 < 1-x$

$\rightarrow \begin{cases} -1+x < 1-x^2 \rightarrow x^2+x-2 < 0 \rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 < x < 1 (I) \\ 1-x^2 < 1-x \rightarrow x^2-x > 0 \rightarrow x(x-1) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < 0 \text{ یا } x > 1 (II) \end{cases}$

II و I اشتراک $\rightarrow -2 < x < 0 \rightarrow [x] = -2 \text{ یا } -1$

می دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۲)

$g(x) = [x+1] + [-x] = [x] + 1 + [-x] \Rightarrow g(x) = [x] + [-x] + 1 = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$f \circ g(x) = \begin{cases} x \in \mathbb{Z}: f(g(x)) = f(1) = 0 \\ x \notin \mathbb{Z}: f(g(x)) = f(0) = 0 \end{cases}$ حال تابع $f \circ g$ را تشکیل می دهیم:

پس $f \circ g(x) = 0$ یعنی برد تابع $f \circ g$ فقط یک عضو صحیح دارد.

کافی است از نامعادله ی داده شده حدود $\sqrt{x+4}$ را به دست آورید. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۳)

$-3 < 1-2x < -1 \rightarrow -4 < -2x < -2 \rightarrow 2 < 2x < 4 \rightarrow 1 < x < 2$

$\rightarrow 5 < x+4 < 6 \rightarrow \underbrace{\sqrt{5}}_{2,23} < \sqrt{x+4} < \underbrace{\sqrt{6}}_{2,44} \rightarrow [\sqrt{x+4}] = 2$

دقت کنید عددی که بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ قرار دارد حتماً ۲٫۰۰۰ می باشد که جزء صحیح آن ۲ است.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۴)

$f \circ g(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f(\sqrt{2} - [\sqrt{2}]) = f(\sqrt{2} - 1)$

$= (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 1$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۵)

$|2x-1| < x \rightarrow -x < 2x-1 < x \rightarrow \begin{cases} -x < 2x-1 \rightarrow 3x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{3} \\ 2x-1 < x \rightarrow x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{1}{3} < x < 1$

حال، حدود $\frac{x-1}{3}$ را پیدا کرده و سپس جزء صحیح آن را محاسبه می کنیم.

$\frac{1}{3} < x < 1 \rightarrow -\frac{2}{3} < x-1 < 0 \rightarrow -\frac{2}{9} < \frac{x-1}{3} < 0 \rightarrow \left[\frac{x-1}{3} \right] = -1$

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می آید. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۶)

$f(x) = [1+x] + [1-x] = 1 + [x] + 1 + [-x] = 2 + [x] + [-x]$

از طرفی می دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$f(x) = 2 + [x] + [-x] \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} f(x) = 2 + 0 = 2$

$f(x) = 2 + [x] + [-x] \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} f(x) = 2 - 1 = 1$

بنابراین کمترین مقدار تابع، برابر یک است.

می دانیم: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1 \end{cases}$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۷)

ابتدا ضابطه ی تابع $f(x)$ را ساده می کنیم.



$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow f(x) = 1 + 0 = 1, \quad x \notin \mathbb{Z} \rightarrow f(x) = 1 - 1 = 0$$

واضح است که اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $f(x) = 0$ است و $\frac{1}{f(x)}$ تعریف نشده می باشد بنابراین با $f(x)$ برابر نیست.

گزینه های ۱، ۲ و ۳ را با مثال نقض می توان رد کرد یعنی:

$$\text{گزینه ۱} \quad [x+y] = [x] + [y], \quad x = 1,6, \quad y = 2,7 \Rightarrow [1,6 + 2,7] = [1,6] + [2,7]$$

$$\Rightarrow [4,3] = 1 + 2 \Rightarrow 4 = 3 \quad \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه ۲} \quad [xy] = [x][y], \quad x = 2, \quad y = 1,6 \Rightarrow [2 \times 1,6] = [2][1,6]$$

$$\Rightarrow [3,2] = 2 \times 1 \Rightarrow 3 = 2 \quad \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه ۳} \quad [x-y] = [x] - [y] \quad x = 3, \quad y = 1,5 \Rightarrow [3 - 1,5] = [3] - [1,5]$$

$$\Rightarrow [1,5] = 3 - 1 \Rightarrow 1 = 2 \quad \text{نادرست}$$

می دانیم عدد صحیح در جمع و تفریق می تواند از داخل براکت خارج شود یعنی:

$$a \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x \pm a] = [x] \pm a \Rightarrow [x+1] = [x] + 1$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{می دانیم:}$$

ضابطه ی تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x) = [x+2] + [-x] = [x] + 2 + [-x] = [x] + [-x] + 2$$

چون $\log 3$ عددی غیر صحیح است پس: $f(\log 3) = -1 + 2 = 1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱۰

$$f(x) = \frac{3^{-[x]}}{3^{[-x]}} = 3^{-[x]-[-x]} = 3^{-([x]+[-x])} = \left(\frac{1}{3}\right)^{[x]+[-x]}$$

از طرفی می دانیم $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ لذا برای مجموعه ی $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{10}\}$ اعداد صحیح هستند، پس داریم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{[x]+[-x]} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

و برای بقیه ی اعداد که صحیح نیستند، داریم:

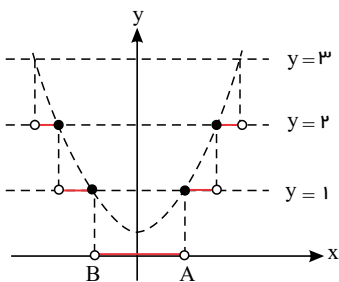
$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{[x]+[-x]} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

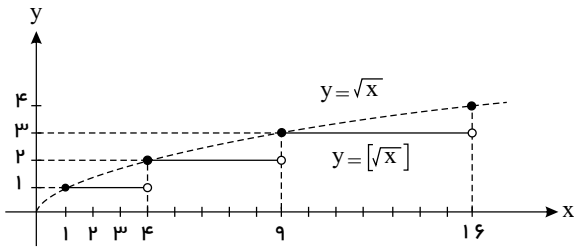
$$f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{10}) = (f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{4}) + f(\sqrt{9})) + (f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{7}) + f(\sqrt{8}) + f(\sqrt{10})) = 3 \times 1 + 7 \times 3 = 24$$

برای رسم تابع $y = [f(x)]$ ابتدا تابع $y = f(x)$ را رسم می کنیم سپس خطوط افقی $y = k$ را به فاصله ی یک واحد از هم رسم

می کنیم. هر کجا این خطوط، شکل را قطع کردند آنجا تو پر است و هر آنچه از شکل بین دو خط افقی قرار گرفت روی خط پایین تصویر می کنیم.

مطابق شکل، AB بلندترین پاره خط در نمودار تابع f است. برای محاسبه ی طول آن، باید طول نقاط تقاطع تابع $y = x^2 + \frac{1}{x}$ را با خط $y = 1$ به دست می آوریم:

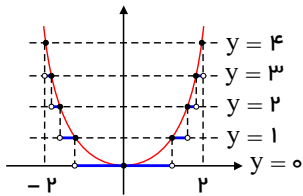




با توجه به شکل بالا، نمودار از سه خط پاره خط به طول‌های $4 - 1 = 3$ ، $9 - 4 = 5$ و $16 - 9 = 7$ تشکیل شده است.

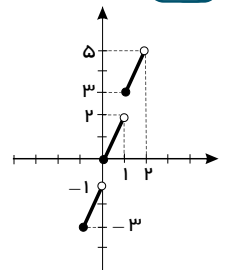
۲۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2)$ از ۷ پاره خط تشکیل شده است.



۲۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است قسمتی از نمودار تابع $y = 2x + [x]$ را رسم کنیم.

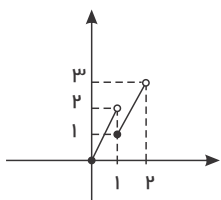
$$\begin{aligned} \text{برای رسم } [x] = -1 &\rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}, \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \\ \text{برای رسم } [x] = 0 &\rightarrow y = 2x \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}, \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \\ \text{برای رسم } [x] = 1 &\rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}, \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases} \end{aligned}$$



واضح است که اگر خط افقی $y = 2$ را رسم کنیم شکل را قطع نمی‌کند.

۲۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ با بازه بندی مناسب شکل را رسم می‌کنیم.

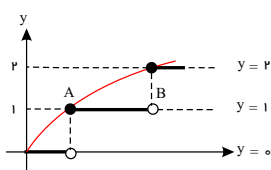
$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\rightarrow y = 2x \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}, \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \\ 1 \leq x < 2 &\rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}, \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \end{aligned}$$



همان‌طور که مشخص است در بازه $[0, 2)$ این تابع از دو پاره خط یکسان به طول $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ (فیثاغورث) تشکیل شده است.

پس $(n, l) = (2, \sqrt{5})$ است.

۲۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

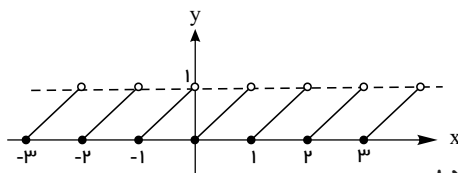


خطوط افقی $y = 0$ و $y = 1$ و $y = 2$ را رسم می‌کنیم. دقت کنید نقطه $\left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right|$ محل تلاقی تابع $y = \sqrt{x}$ با خط افقی $y = 1$ است

و نقطه $\left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right|$ محل تلاقی تابع $y = \sqrt{x}$ با خط افقی $y = 2$ است. بنابراین طول پاره خط AB برابر ۳ واحد است.

۲۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت مقابل است:



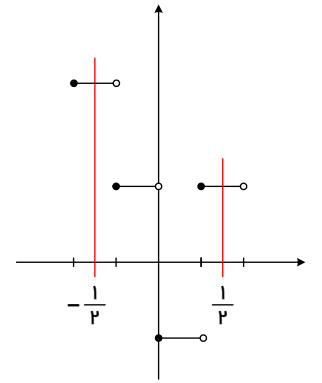
واضح است که برد تابع داده شده بازه $[0, 1)$ است.

$$\text{اگر } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{اگر } -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

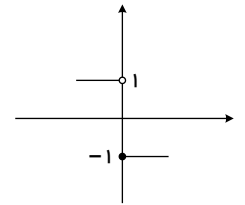
$$\text{اگر } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$$\text{if: } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{if: } x \rightarrow 0^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$



فقط در گزینه ۲ تابع در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.

۲۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴) معادله‌ی داده شده را به صورت $3[x] - 12 = |x|$ می‌نویسیم. می‌دانیم جواب جزء صحیح همواره مقداری صحیح است پس سمت چپ تساوی عبارتی صحیح است لذا سمت راست تساوی نیز باید عددی صحیح باشد یعنی x عددی صحیح است پس $[x] = x$ است.

$$3x - 12 = |x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 3x - 12 = x \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6 \\ x < 0 \rightarrow 3x - 12 = -x \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

غ ق ق (با توجه به شرط)

پس تنها جواب معادله $x = 6$ است.

۲۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

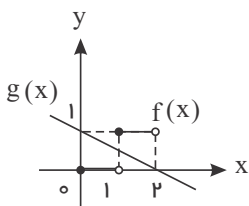
اگر $|f(x)| \leq k$ باشد و $k > 0$ باشد، آن گاه $-k \leq f(x) \leq k$ است و جواب جزء صحیح همواره عددی صحیح است.

$$|[x] - 2| \leq 1 \rightarrow -1 \leq [x] - 2 \leq 1 \rightarrow 1 \leq [x] \leq 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2 \\ \text{یا} \\ [x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3 \\ \text{یا} \\ [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} 1 \leq x < 4 \rightarrow x \in [1, 4) \rightarrow a = 1, b = 4 \rightarrow a + b = 5$$

۲۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴) معادله را به فرم $[x] = -\frac{1}{p}x + 1$ بازنویسی می‌کنیم. نمودارهای توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = -\frac{1}{p}x + 1$ را رسم می‌کنیم.

مطابق شکل زیر، f و g نقطه تقاطعی ندارند و در نتیجه معادله جواب ندارد.



۲۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید و می‌دانیم اگر $[x] = n$ و $n \in \mathbb{Z}$ باشد آن گاه $n \leq x < n + 1$ است.

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{3}{2}\right] = 3 \rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2} + 1\right] = 3$$

$$\rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1 = 3 \rightarrow 2\left[x + \frac{1}{2}\right] = 2 \rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] = 1$$



$$[x] + [3x] = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 & (*) \\ [3x] = 0 \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3} & (**) \end{cases}$$

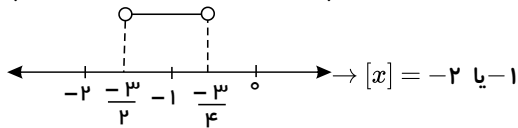
از اشتراک نامعادله‌های (*) و (**)، مجموعه جواب معادله، بازه‌ی $(0, \frac{1}{3}]$ است، پس $a = 0$ ، $b = \frac{1}{3}$ ، بنابراین $b - a = \frac{1}{3}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۴

$$\left[\frac{2x+1}{3} \right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \Rightarrow 6 \leq 2x+1 < 9 \Rightarrow 5 \leq 2x < 8 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < 4$$

اکنون باید حدود $\frac{1-x}{2}$ را پیدا کنیم.

$$\frac{5}{2} \leq x < 4 \Rightarrow -4 < -x \leq -\frac{5}{2} \Rightarrow -3 < 1-x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < \frac{1-x}{2} \leq -\frac{3}{4}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۵ می‌دانیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \Rightarrow [-x] = -[x]$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

هرگاه در معادله‌ای هم $[x]$ و هم $[-x]$ وجود داشت یک بار فرض کنید $x \in \mathbb{Z}$ و یک بار فرض کنید $x \notin \mathbb{Z}$.

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] - (-[x]) = 3 \Rightarrow 2[x] = 3 \Rightarrow [x] = \frac{3}{2} : \text{امکان ندارد جواب جزء صحیح همواره صحیح است.}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] - (-[x] - 1) = 3 \Rightarrow 2[x] = 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 1 < x < 2 \text{ یا } x \in (1, 2)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۶

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید و می‌دانیم اگر $[x] = n$ باشد ($n \in \mathbb{Z}$) آنگاه $n \leq x < n+1$ است.

$$[|x| + 1] = 1 \Rightarrow [|x|] + 1 = 1 \Rightarrow [|x|] = 0 \Rightarrow 0 \leq |x| < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \\ |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} = (-1, 1) \Rightarrow a = -1, b = 1$$

$$\Rightarrow b - a = 1 - (-1) = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۷ روش اول:

$$[x] = n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \leq x < n+1$$

ابتدا حاصل $\sqrt{4n^2 + 2n + 1}$ را می‌یابیم. برای این کار عبارت زیر را به دو مربع کامل بنویسیم.

$$4n^2 < 4n^2 + 2n + 1 < 4n^2 + 4n + 1 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{4n^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \underbrace{\sqrt{4n^2 + 4n + 1}}_{(2n+1)^2}$$



$$|2n| < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < |2n + 1| \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \underbrace{2n < \sqrt{4n^2 + 2n + 1}}_{\text{دو عدد صحیح متوالی}} < \underbrace{2n + 1}_{\text{دو عدد صحیح متوالی}} \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 + 2n + 1} \right] = 2n(*)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} [2x + 1] &= \left[\sqrt{4n^2 + 2n + 1} \right] \xrightarrow{(*)} [2x + 1] = 2n \Rightarrow [2x] + 1 = 2n \Rightarrow [2x] = \underbrace{2n - 1}_{\in \mathbb{Z}} \\ \rightarrow 2x - 1 \leq 2x < 2n - 1 + 1 \rightarrow 2n - 1 \leq 2x < 2n &\xrightarrow{\div 2} n - \frac{1}{2} \leq x < n \rightarrow x \in \left[n - \frac{1}{2}, n \right) \end{aligned}$$

روش دوم:

به ازای یک n دلخواه، مثلاً $n = 1$ معادله را حل می‌کنیم.

$$[2x + 1] = \underbrace{\left[\sqrt{5} \right]}_{2, \dots} \Rightarrow [2x + 1] = 2 \Rightarrow 2 \leq 2x + 1 < 3 \rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow x \in \left[1 - \frac{1}{2}, 1 \right)$$

با مقایسه‌ی بازه‌ی به دست آمده با گزینه‌ها، گزینه‌ی «۴» را به عنوان پاسخ انتخاب می‌کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۸

$$\begin{aligned} [x] + \left[x - \frac{3}{2} \right] - \left[x - \frac{1}{2} \right] &= 3 \Rightarrow [x] + \left[x - \frac{1}{2} - 1 \right] - \left[x - \frac{1}{2} \right] = 3 \\ \Rightarrow [x] + \left[x - \frac{1}{2} \right] - 1 - \left[x - \frac{1}{2} \right] &= 3 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \text{ یا } x \in [4, 5) \end{aligned}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴

۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴

۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴

۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴
۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴



۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴
۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴

۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴
۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴

۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴
۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴
۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲۰۱	۱	۲	۳	۴
۲۰۲	۱	۲	۳	۴
۲۰۳	۱	۲	۳	۴
۲۰۴	۱	۲	۳	۴
۲۰۵	۱	۲	۳	۴
۲۰۶	۱	۲	۳	۴
۲۰۷	۱	۲	۳	۴
۲۰۸	۱	۲	۳	۴
۲۰۹	۱	۲	۳	۴

۲۱۰	۱	۲	۳	۴
۲۱۱	۱	۲	۳	۴
۲۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۲۸	۱	۲	۳	۴